

ANNALES

DE LA

SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE

DE BRUXELLES

ASSOCIATION SANS BUT LUCRATIF

TOME SOIXANTE-ET-UNIÈME, 1947

SÉRIE I

SCIENCES MATHÉMATIQUES, ASTRONOMIQUES
ET PHYSIQUES

DEUXIÈME FASCICULE

2 JUIN 1947



Publié avec le concours de la Fondation universitaire de Belgique

LOUVAIN

Secrétariat de la Société Scientifique

11, RUE DES RÉCOLLETS, 11

Chèques postaux 2027.46

1947

Publication trimestrielle. Prix de ce fascicule séparé : 35 frs

TABLE DES MATIÈRES

PAGE

Session du jeudi 24 avril 1947, à Bruxelles.

PREMIÈRE SECTION : Sciences mathématiques et astronomiques	
Sur l'élimination des paramètres dans la méthode des caractéristiques de Cauchy pour l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre, par M. R. H. J. Germa	99
Interpolation dans la méthode de Runge-Kutta, par M. G. Lemaître	106
Sur les tétraèdres orthologiques, par M. V. Thébault	112
Anneaux finis ; systèmes hypercomplexes de rang deux sur un corps, par M. R. Ballieu	117
DEUXIÈME SECTION : Physique et Chimie	
Sur la correction de largeur des fentes dans les mesures au spectrophotomètre, par M. A. Biot	127
Sur l'absorption du baume du Canada dans le spectre visible, par M. A. Biot	136
Spectres d'absorption infra-rouges des alcools méthyliques CH_3OH , CH_3OD , CD_3OH et CD_3OD , liquides et vapeurs, par M. Ch. Courtoy	139
Azéotropes de sulfures confrontés avec des azéotropes d'halogénures, par M. M. Lecat	148
Azéotropes d'oxydes, par M. M. Lecat	153
Recherches sur la tension limite d'entraînement des matériaux constitutifs du lit, par M. L. J. Tison	163

Le prix d'ABONNEMENT aux ANNALES, série I, pour des personnes ne faisant pas partie de la Société scientifique est fixé comme suit :

en Belgique, au Congo-Belge et au Luxembourg	70 fr.
dans les autres pays	120 fr.

SESSION DU JEUDI 24 AVRIL 1947

A BRUXELLES

Première Section

Sciences mathématiques et astronomiques

Sur l'élimination des paramètres dans la méthode
des caractéristiques de Cauchy pour l'intégration des
équations aux dérivées partielles du premier ordre

PAR

R. H. J. GERMAV

Professeur à l'Université de Liège

§ 1. Dans une note parue antérieurement sous le même titre ⁽¹⁾, nous avons considéré une équation aux dérivées partielles de forme résolue par rapport à p_1 , savoir

$$(1) \quad p_1 = f(x_1, x_2, \dots, x_n, z, p_2, \dots, p_n).$$

Nous avons montré que les $(n - 1)$ paramètres t_1, \dots, t_{n-1} introduits par la méthode des caractéristiques de Cauchy pour l'intégration de l'équation (1), peuvent s'éliminer sans nécessiter d'autres calculs que ceux qui sont exigés par l'intégration du système différentiel des caractéristiques associé à l'équation (1) elle-même. Cette élimination conduit à des équations qui définissent comme fonctions implicites :

1°) l'intégrale de Cauchy de l'équation (1), astreinte à se réduire pour la valeur numérique $x_1 = x_1^{*0}$ à une fonction donnée $\chi(x_2, \dots, x_n)$;

2°) les dérivées p_2, \dots, p_n de cette intégrale par rapport à x_2, \dots, x_n ; la dérivée p_1 se calcule alors directement par l'équation (1) elle-même.

(1) Voir : *Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, t. 178, 1924, p. 2225.

Les équations définissant $z, p_2, \dots p_n$ comme fonctions implicites peuvent être formées à telle approximation que l'on veut sans autres calculs que ceux auxquels on est conduit par l'application de la méthode des approximations successives de M. E. Picard à l'intégration du système différentiel des caractéristiques (1).

La résolution de ces équations s'opère alors par un procédé étendant, dans une certaine mesure, la méthode d'approximations successives appliquée par M. E. Goursat à la détermination des fonctions implicites (2).

§ 2. Les résultats rappelés ci-dessus peuvent s'étendre aux équations aux dérivées partielles du premier ordre de forme non résolue, pour autant qu'il s'agisse de la recherche des intégrales non singulières de ces équations. Considérons l'équation

$$(2) \quad F(x_1, x_2, \dots x_n, z, p_1, p_2, \dots p_n) = 0.$$

Supposons-la vérifiée par le système de valeurs numériques $x_1^{*0}, \dots x_n^{*0}, z^0, p_1^0, \dots p_n^0$ et admettons que le premier membre soit holomorphe au point $x_1^{*0}, \dots p_n^{*0}$ et dans son domaine. Supposons de plus que

$$(3) \quad \left(\frac{\partial F}{\partial p_1} \right)_0 = \frac{\partial F}{\partial p_1}(x_1^{*0}, \dots p_n^{*0}) \neq 0.$$

L'équation (2) est équivalente, dans le domaine de $x_1^{*0}, \dots p_n^{*0}$ à l'équation de forme résolue

$$(4) \quad p_1 = f(x_1, \dots x_n, z, p_2, \dots p_n).$$

La fonction f est la fonction implicite définie par l'équation (2).

Le système différentiel caractéristique associé à l'équation aux dérivées partielles (4) se réduit à

$$(5) \quad \frac{dx_i}{dx_1} = -\frac{\partial f}{\partial p_i}, \quad \frac{dz}{dx_1} = f - \sum_{k=2}^{n-1} p_k \frac{\partial f}{\partial p_k}, \quad \frac{dp_i}{dx_1} = \frac{\partial f}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial f}{\partial z},$$

$$(i = 2, \dots n).$$

Désignons par

$$(6) \quad \begin{cases} x_i = \varphi_{i,\infty}(x_1, x_1^{*0}, x_2^0, \dots x_n^0, z^0, p_2^0, \dots p_n^0), \\ z = \psi_\infty(x_1, x_1^{*0}, x_2^0, \dots x_n^0, z^0, p_2^0, \dots p_n^0), \\ p_i = \pi_{i,\infty}(x_1, x_1^{*0}, x_2^0, \dots x_n^0, z^0, p_2^0, \dots p_n^0), \end{cases} \quad (i = 2, \dots n),$$

les intégrales de ce système prenant en x_1^{*0} les valeurs numériques $x_2^0, \dots x_n^0, z^0, p_2^0, \dots p_n^0$.

Par un théorème de Cauchy, on peut écrire pour des valeurs des x_i, z, p_i

(1) Intégration par approximations successives des équations aux dérivées partielles (*Mémoires de la Société Royale des Sciences de Liège*, 3^e série, tome XII, 1924).

(2) E. GOURSAT : Cours d'Analyse, 2^e éd., t. I, chap. III.

suffisamment voisines de x_i^o, z^o, p_i^o et pour des valeurs de x_1 suffisamment voisines de x_1^{*o} , les formules inverses

$$(7) \begin{cases} x_i^o = \varphi_{i, \infty} (x_1^{*o}, x_1, x_2, \dots x_n, z, p_2, \dots p_n) , \\ z^o = \psi_{\infty} (x_1^{*o}, x_1, x_2, \dots x_n, z, p_2, \dots p_n) , \\ p_i^o = \pi_{i, \infty} (x_1^{*o}, x_1, x_2, \dots x_n, z, p_2, \dots p_n) , \quad (i = 2, \dots n). \end{cases}$$

Soit $\chi (x_2, \dots x_n)$ une fonction holomorphe prenant en $x_2^{*o}, \dots x_n^{*o}$ la valeur numérique z^{*o} , tandis que ses dérivées partielles premières prennent en ce point les valeurs respectives $p_2^{*o}, \dots p_n^{*o}$.

L'intégrale de Cauchy de l'équation (4), se réduisant en $x_1 = x_1^{*o}$ à la fonction donnée χ et ses dérivées partielles premières par rapport à $x_2, \dots x_n$ s'obtiennent en éliminant les paramètres $t_1, \dots t_{n-1}$, entre les équations

$$(8) \begin{cases} t_{i-1} = \varphi_{i, \infty} (x_1^{*o}, x_1, x_2, \dots x_n, z, p_2, \dots p_n) , \\ \chi (t_1, \dots t_{n-1}) \dots \psi_{\infty} (x_1^{*o}, x_1, \dots x_n, z, p_2, \dots p_n) , \\ \frac{\partial \chi}{\partial t_{i-1}} (t_1, \dots t_{n-1}) = \pi_{i, \infty} (x_1^{*o}, x_1, x_2, \dots x_n, z, p_2, \dots p_n), \quad (i=2, \dots n). \end{cases}$$

Ainsi $z, p_2, \dots p_n$ satisfont aux équations

$$(9) \begin{cases} \psi_{\infty} (x_1^{*o}, x_1, \dots x_n, z, p_2 \dots p_n) \\ - \chi \begin{bmatrix} \varphi_{2, \infty} (x_1^{*o}, x_1, x_2, \dots x_n, z, p_2, \dots p_n) \\ \vdots \\ \varphi_{n, \infty} (x_1^{*o}, x_1, x_2, \dots x_n, z, p_2, \dots p_n) \end{bmatrix} = 0, \\ \pi_{i, \infty} (x_1^{*o}, x_1, \dots x_n, z, p_2, \dots p_n) \\ - \frac{\partial \chi}{\partial x_i} \begin{bmatrix} \varphi_{2, \infty} (x_1^{*o}, x_1, \dots x_n, z, p_2, \dots p_n) \\ \vdots \\ \varphi_{n, \infty} (x_1^{*o}, x_1, \dots x_n, z, p_2, \dots p_n) \end{bmatrix} = 0, \quad (i=2, \dots n). \end{cases}$$

Ces équations sont effectivement résolubles par le théorème des fonctions implicites. Elles sont vérifiées par les valeurs initiales $z=x (x_2, \dots x_n)$,

$p_i = \frac{\partial \chi}{\partial x_i} (x_2, \dots x_n)$, ($i = 2, \dots n$) ; leur jacobien par rapport à $z, p_2, \dots p_n$

se réduit à l'unité pour $x_1 = x_1^{*o}$.

La difficulté réside ici dans le fait que les seconds membres des équations différentielles (5) ne sont pas en général connus sous forme finie, puisque la fonction f elle-même n'est déterminée que comme fonction implicite. Mais cette fonction f est la limite pour $\mu \rightarrow \infty$ de la suite uniformément convergente

$$(10) \quad f_1, f_2, \dots f_{\mu}, f_{\mu+1}, \dots$$

dont les termes se définissent de proche en proche par la formule récurrente

$$(11) \quad f_{\mu+1} = f_{\mu} - \frac{F[x_1, \dots, x_n, z, f_{\mu}, p_2, \dots, p_n]}{\left(\frac{\partial F}{\partial p_1}\right)_o},$$

moyennant la valeur initiale $f_o = p_1^{*o}$.

Les dérivées partielles premières de f par rapport aux x_i, z, p_i ($i=2, \dots, n$) sont les limites pour $\mu \rightarrow \infty$ des suites uniformément convergentes

$$(12) \quad \begin{cases} \frac{\partial f_1}{\partial x_i}, \frac{\partial f_2}{\partial x_i}, \dots, \frac{\partial f_{\mu}}{\partial x_i}, \dots \\ \frac{\partial f_1}{\partial z}, \frac{\partial f_2}{\partial z}, \dots, \frac{\partial f_{\mu}}{\partial z}, \dots \\ \frac{\partial f_1}{\partial p_i}, \frac{\partial f_2}{\partial p_i}, \dots, \frac{\partial f_{\mu}}{\partial p_i}, \dots \end{cases} \quad (i=2, \dots, n)$$

dont les termes se définissent de proche en proche par les formules récurrentes

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f_{\mu+1}}{\partial x_i} = \frac{\partial f_{\mu}}{\partial x_i} \\ - \frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}[x_1, \dots, x_n, z, f_{\mu}, p_2, \dots, p_n] + \frac{\partial F}{\partial p_1}[x_1, x_2, \dots, x_n, z, f_{\mu}, p_2, \dots, p_n] \frac{\partial f_{\mu}}{\partial x}}{\left(\frac{\partial F}{\partial p_1}\right)_o}, \quad (i=2, \dots, n) \end{array} \right.$$

etc., etc.

Par application de la méthode d'approximations successives de M. E. Cotton ⁽¹⁾, le système différentiel (5) s'intègre au moyen des formules récurrentes

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Phi_{i,\mu+1}(x_1, x_1^{*o}, x_2^o, \dots, x_n^o, z^o, p_2^o, \dots, p_n^o) = x_i^o - \int_{x_1^{*o}}^{x_1} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f_{\mu+1}}{\partial p_i} \end{array} \right\} \begin{array}{l} x_i = \Phi_{i,\mu} \\ z = \Psi_{\mu} \\ p_i = \pi_{i,\mu} \end{array} dx_1, \\ \Psi_{\mu+1}(x_1, x_1^{*o}, x_2^o, \dots, x_n^o, z^o, p_2^o, \dots, p_n^o) = z^o + \int_{x_1^{*o}}^{x_1} \left[f_{\mu+1} - \sum_{k=2}^{k=n} p_k \frac{\partial f_{\mu+1}}{\partial p_k} \right] \begin{array}{l} x_i = \Phi_{i,\mu} \\ z = \Psi_{\mu} \\ p_i = \pi_{i,\mu} \end{array} dx_1, \\ \pi_{i,\mu+1}(x_1, x_1^{*o}, x_2^o, \dots, x_n^o, z^o, p_2^o, \dots, p_n^o) = p_i^o + \int_{x_1^{*o}}^{x_1} \left[\frac{\partial f_{\mu+1}}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial f_{\mu+1}}{\partial z} \right] \begin{array}{l} x_i = \Phi_{i,\mu} \\ z = \Psi_{\mu} \\ p_i = \pi_{i,\mu} \end{array} dx_1 \end{array} \right. \quad (i=2, \dots, n),$$

moyennant les valeurs initiales $\Phi_{i,o} = x_2^o, \Psi_o = z^o, \pi_{i,o} = p_i^o$.

(1) Voir : *Bulletin de la Société Mathématique de France*, t. XXXVII, pp. 204-214.

$$(25) \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial x_1^o} & \dots & \frac{\partial G_1}{\partial x_K^o} & \frac{\partial G_1}{\partial x_s^o} & \frac{\partial G_1}{\partial z^o} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial G_K}{\partial x_1^o} & \dots & \frac{\partial G_K}{\partial x_K^o} & \frac{\partial G_K}{\partial x_s^o} & \frac{\partial G_K}{\partial z^o} \\ \frac{\partial G_{K+1}}{\partial x_1^o} & \dots & \frac{\partial G_{K+1}}{\partial x_K^o} & \frac{\partial G_{K+1}}{\partial x_s^o} & \frac{\partial G_{K+1}}{\partial z^o} \\ p_1^o & \dots & p_K^o & p_s^o & -1 \end{vmatrix} = 0, \quad (S = K+1, \dots, n).$$

En définitive, les $2n+1$ valeurs $x_1^o, \dots, x_n^o, z_o, p_1^o, \dots, p_n^o$ de l'élément initial des caractéristiques vérifient l'équation (24), les $K+1$ équations (23), les $n-K$ équations (25), c'est-à-dire au total $1+K+1+n-K=n+2$ équations de condition et dépendent bien de $2n+1-n-2=n-1$ arbitraires. Dans les équations (24), (23), (25), remplaçons les x_j^o, z^o, p_j^o par leurs valeurs (20), nous obtenons les $n+2$ équations suivantes

$$(26) \quad \left\{ \begin{array}{l} F[\Phi_1(t_o, t, x_1, \dots, p_n), \dots, \Phi_n(t_o, t, x_1, \dots, p_n), \Psi(t_o, t, x_1, \dots, p_n), \\ \quad \Omega_1(t_o, t, x_1, \dots, p_n), \dots, \Omega_n(t_o, t, x_1, \dots, p_n)] = 0, \\ [G_1] = 0, \dots, [G_K] = 0, [G_{K+1}] = 0, \\ \left[\begin{array}{cccc} \left[\frac{\partial G_1}{\partial x_1^o} \right] & \dots & \left[\frac{\partial G_1}{\partial x_K^o} \right] & \left[\frac{\partial G_1}{\partial x_s^o} \right] & \left[\frac{\partial G_1}{\partial z_o} \right] \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \left[\frac{\partial G_K}{\partial x_1^o} \right] & \dots & \left[\frac{\partial G_K}{\partial x_K^o} \right] & \left[\frac{\partial G_K}{\partial x_s^o} \right] & \left[\frac{\partial G_K}{\partial z_o} \right] \\ \left[\frac{\partial G_{K+1}}{\partial x_1^o} \right] & \dots & \left[\frac{\partial G_{K+1}}{\partial x_K^o} \right] & \left[\frac{\partial G_{K+1}}{\partial x_s^o} \right] & \left[\frac{\partial G_{K+1}}{\partial z_o} \right] \\ \Omega_1 & \dots & \Omega_K & \Omega_s & -1 \end{array} \right] = 0, \\ \end{array} \right. \quad (S=K+1, \dots, n),$$

qui permettent de calculer en fonctions implicites de x_1, \dots, x_n les $n+2$ quantités z, p_1, \dots, p_n, t . Nous avons écrit

$$[G_j], \left[\frac{\partial G_j}{\partial x_K^o} \right], \text{ etc.}$$

pour indiquer que dans ces fonctions les quantités x_1^o, \dots, x_n^o, z_o ont été remplacées par les $n+1$ premières expressions (20).

Saive, le 8 avril 1947.

Interpolation dans la méthode de Runge-Kutta

PAR

G. LEMAITRE

Considérons un système d'équations différentielles

$$(1) \quad \frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, y_2, \dots, y_r)$$

On se donne les valeurs initiales

$$y_{01}, y_{02}, \dots, y_{0r}$$

pour $x = 0$ et on demande de calculer les valeurs des fonctions y_i pour une valeur de

$$x = 2w$$

Dans ce but, on calcule quatre valeurs des fonctions f_i .

$$(2) \quad f_{ni} = f_i(x_n, y_{nk}) \quad (n = 1, 2, 3, 4)$$

pour

$$(3) \quad \begin{array}{ll} x_1 = 0 & y_{1i} = y_{0i} \\ x_2 = w & y_{2i} = y_{0i} + w f_{1i} \\ x_3 = w & y_{3i} = y_{0i} + w f_{2i} \\ x_4 = 2w & y_{4i} = y_{0i} + 2w f_{3i} \end{array}$$

La méthode de Runge-Kutta consiste à adopter pour les valeurs des y_i à l'extrémité $x = 2w$ de l'intervalle d'intégration les valeurs y_{5i}

$$(4) \quad y_{5i} = y_{0i} + \frac{w}{3} (f_{1i} + 2f_{2i} + 2f_{3i} + f_{4i})$$

Ces valeurs sont correctes aux termes du quatrième ordre d'un développement en w .

Nous nous proposons de montrer que si on veut se contenter de résultats valables au troisième ordre en w on peut adopter la formule d'interpolation

$$(5) \quad \begin{aligned} y_i &= y_{0i} + f_{1i} x \\ &+ \frac{x^2}{4w} (-3f_{1i} + 2f_{2i} + 2f_{3i} - f_{4i}) \\ &+ \frac{x^3}{6w^2} (f_{1i} - f_{2i} - f_{3i} + f_{4i}) \end{aligned}$$

valable en tous points de l'intervalle d'intégration $0 < x < 2w$.

Lorsque les équations différentielles sont de la forme

$$(6) \quad \frac{d^2 y_i}{dx^2} = g_i(x, y_k)$$

le calcul peut se faire par les formules suivantes

$$(7) \quad \begin{aligned} y_{1i} &= y_{0i} \\ y_{2i} &= y_{0i} + w z_{0i} \\ y_{3i} &= y_{2i} + w^2 g_{1i} \\ y_{4i} &= 2y_{2i} - y_{1i} + 2w^2 g_{2i} \\ y'_{1i} &= y_{5i} = 2y_{2i} - y_{1i} + \frac{2}{3} w^2 (g_{1i} + g_{2i} + g_{3i}) \\ y'_{2i} &= y_{6i} = y_{5i} + y_{2i} - y_{1i} + \frac{1}{3} w^2 (g_{1i} + 2g_{2i} + 2g_{3i} + g_{4i}) \end{aligned}$$

Dans ces formules z_{0i} désigne les valeurs initiales des dérivées premières des fonctions y_i . y_{1i} et y_{2i} sont donc des données. y_{5i} et y_{6i} sont donc les données pour l'étape suivante d'intégration. C'est pour cette raison que nous les avons notées y'_{1i} et y'_{2i} .

On a naturellement d'une façon analogue à (2) $g_{ni} = g_i(x_n, y_{nk})$.

L'interpolation peut se faire par la formule

$$(8) \quad \begin{aligned} y_i &= y_{1i} + (y_{2i} - y_{1i}) \frac{x}{w} + g_{1i} \frac{x^2}{2} \\ &+ \frac{x^3}{12w} (-3g_{1i} + 2g_{2i} + 2g_{3i} - g_{4i}) \\ &+ \frac{x^4}{24w^2} (g_{1i} - g_{2i} - g_{3i} + g_{4i}) \end{aligned}$$

qui est valable au quatrième ordre en w .

Pour établir les résultats que nous venons d'énoncer, nous sommes amenés à reprendre « ab ovo » la démonstration de la méthode de Runge-Kutta.

Les fonctions f_i peuvent être représentées par un développement

$$(9) \quad \begin{aligned} f_i &= a_i + b_i x + \sum_k b_{ik} (y_k - y_{0k}) \\ &+ c_i x^2 + \sum_k c_{ik} x (y_k - y_{0k}) + \sum_k \sum_l c_{ikl} (y_k - y_{0k}) (y_l - y_{0l}) \\ &+ h_i x^3 + \sum_k h_{ik} x^2 (y_k - y_{0k}) + \sum_k \sum_l h_{ikl} x (y_k - y_{0k}) (y_l - y_{0l}) \\ &+ \sum_k \sum_l \sum_m h_{iklm} (y_k - y_{0k}) (y_l - y_{0l}) (y_m - y_{0m}) \end{aligned}$$

valable au troisième ordre en w .

Si nous posons

$$\begin{aligned}
 (10) \quad B_i &= b_i + \sum_k b_{ik} a_k \\
 C_i &= c_i + \sum_k c_{ik} a_k + \sum_k \sum_l c_{ikl} a_k a_l \\
 H_i &= h_i + \sum_k h_{ik} a_k + \sum_k \sum_l h_{ikl} a_k a_l + \sum_k \sum_l \sum_m h_{iklm} a_k a_l a_m \\
 D_i &= \sum_k b_{ik} B_k \\
 E_i &= \sum_k c_{ik} B_k \\
 F_i &= \sum_k b_{ik} C_k \\
 G_i &= \sum_k b_{ik} D_k
 \end{aligned}$$

nous pouvons écrire le développement

$$(11) \quad y_i = y_{oi} + a_i x + B_i \frac{x^2}{2} + \left(C_i + \frac{1}{2} D_i \right) \frac{x^3}{3} + \left(H_i + \frac{1}{2} E_i + \frac{1}{3} F_i + \frac{1}{6} G_i \right) \frac{x^4}{4},$$

qui est valable au quatrième ordre.

Avec les mêmes notations et au même degré d'approximation, nous obtenons pour les fonctions définies en (2)

$$\begin{aligned}
 f_{1i} &= a_i \\
 f_{2i} &= a_i + w B_i + w^2 C_i + w^3 H_i \\
 (12) \quad f_{3i} &= a_i + w B_i + w^2 (C_i + D_i) + w^3 (H_i + E_i + F_i) \\
 f_{4i} &= a_i + 2w B_i + w^2 (4C_i + 2D_i) + w^3 (8H_i + 4E_i + 2F_i + 2G_i)
 \end{aligned}$$

Posant $x = 2w$, dans (11), nous obtenons

$$(13) \quad y_{5i} = y_{oi} + 2a_i w + 2B_i w^2 + \frac{8}{3} \left(C_i + \frac{1}{2} D_i \right) w^3 + 4 \left(H_i + \frac{1}{2} E_i + \frac{1}{3} F_i + \frac{1}{6} G_i \right) w^4,$$

qui est l'expression qu'on obtient en portant les expressions (12) dans la formule (4). Ceci justifie la méthode de Runge-Kutta.

Pour justifier la formule d'interpolation (5) il suffit d'y porter les expressions (12). On retrouve les termes des trois premiers ordres de la formule (11). La formule d'interpolation est donc valable au troisième ordre. L'erreur du quatrième ordre est

$$(14) \quad \left[\left(H_i + \frac{1}{2} E_i \right) \frac{x^2(2w - x)}{4} - \frac{F_i}{12} x^3 + \frac{G_i}{24} x^2(6w - x) \right] (2w - x)$$

Dans le cas des équations (6) on peut écrire

$$(15) \quad \frac{dy_i}{dx} = z_i \quad \frac{dz_i}{dx} = g_i(x, y_k)$$

L'application de la méthode de Runge-Kutta donne

$$(16) \quad \begin{array}{ll} z_{1i} = z_{0i} & y_{1i} = y_{0i} \\ z_{2i} = z_{0i} + wg_{1i} & y_{2i} = y_{0i} + wz_{1i} \\ z_{3i} = z_{0i} + wg_{2i} & y_{3i} = y_{0i} + wz_{2i} \\ z_{4i} = z_{0i} + 2wg_{3i} & y_{4i} = y_{0i} + 2wz_{3i} \end{array}$$

et les valeurs adoptées sont

$$(17) \quad z_{5i} = z_{0i} + \frac{w}{3} (g_{1i} + 2g_{2i} + 2g_{3i} + g_{4i})$$

$$(18) \quad y_{5i} = y_{0i} + \frac{w}{3} (z_{1i} + 2z_{2i} + 2z_{3i} + z_{4i})$$

En éliminant les z_i au moyen de (16) on obtient y_{5i} dans (7) tandis que y_{5i} résulte de $y_{5i} = y_{5i} + wz_{5i}$.

Enfin la formule d'interpolation pour les z s'écrit d'après (5)

$$(19) \quad \begin{aligned} \frac{dy_i}{dx} = z_i = z_{0i} + g_{1i}x + \frac{x^2}{4w} (-3g_{1i} + 2g_{2i} + 2g_{3i} - g_{4i}) \\ + \frac{x^3}{6w^2} (g_{1i} - g_{2i} - g_{3i} + g_{4i}) \end{aligned}$$

dont l'intégration fournit (8).

Dans ce qui précède nous avons considéré la méthode de Runge-Kutta, dans la forme qui est recommandée par Runge dans l'exposé qu'il en donne dans « Runge et König-Numerische Rechnung » (voir aussi l'appendice B à E. L. INCE-Ordinary differential equations », qui reproduit l'exposé de Runge et y ajoute une note bibliographique).

Cette méthode est, en réalité, un cas spécial choisi parmi une infinité de solutions d'un même problème. Si on adoptait une autre variante, il serait tout aussi simple de trouver les formules d'interpolation correspondantes.

Il est une variante de la méthode de Runge-Kutta qui nous paraît présenter des avantages. Nous allons reproduire, en les marquant d'un accent, ce que deviennent les formules de la méthode de Runge-Kutta et nos formules d'interpolation, pour cette variante.

Les valeurs des fonctions (2) se calculent pour

$$(3') \quad \begin{array}{ll} x_1 = 0 & y_{1i} = y_{0i} \\ x_2 = w & y_{2i} = y_{0i} + wf_{1i} \\ x_3 = w & y_{3i} = y_{0i} + \frac{1}{2} w (f_{1i} + f_{2i}) \\ x_4 = 2w & y_{4i} = y_{0i} + 2w (2f_{3i} - f_{2i}) \end{array}$$

et les valeurs adoptées sont

$$(4') \quad y_{5i} = y_{0i} + \frac{w}{3} (f_{1i} + 4f_{3i} + f_{4i})$$

La formule d'interpolation est

$$(5') \quad y_i = y_{0i} + f_{1i}x + \frac{x^2}{4w} (-3f_{1i} + 4f_{3i} - f_{4i}) \\ + \frac{x^3}{6w^2} (f_{1i} - 2f_{3i} + f_{4i})$$

Dans le cas d'équations du second ordre (6), on aurait

$$\begin{aligned} z_{1i} &= z_{0i} & y_{1i} &= y_{0i} \\ z_{2i} &= z_{0i} + wg_{1i} & y_{2i} &= y_{0i} + wz_{1i} \\ (16') \quad z_{3i} &= z_{0i} + \frac{1}{2} w (g_{1i} + g_{2i}) & y_{3i} &= y_{0i} + \frac{1}{2} w (z_{1i} + z_{2i}) \\ z_{4i} &= z_{0i} + 2w (2g_{3i} - g_{2i}) & y_{4i} &= y_{0i} + 2w (2z_{3i} - z_{2i}) \end{aligned}$$

qui conduisent à adopter

$$(17') \quad y_{5i} = y_{0i} + \frac{w}{3} (z_{1i} + 4z_{3i} + z_{4i})$$

et

$$(18') \quad z_{5i} = z_{0i} + \frac{w}{3} (g_{1i} + 4g_{3i} + g_{4i})$$

On a donc à calculer

$$\begin{aligned} y_{1i} &= y_{0i} \\ y_{2i} &= y_{0i} + wz_{1i} \\ (7') \quad y_{3i} &= y_{2i} + \frac{1}{2} w^2 g_{1i} \\ y_{4i} &= 2y_{2i} - y_{0i} + 2w^2 g_{2i} \\ y_{5i} &= 2y_{2i} - y_{0i} + \frac{w^2}{3} (2g_{1i} + 4g_{3i}) \\ y_{6i} &= y_{5i} + y_{2i} - y_{1i} + \frac{w^2}{3} (g_{1i} + 4g_{3i} + g_{4i}) \end{aligned}$$

L'interpolation se fait par la formule

$$(8') \quad y_i = y_{1i} + (y_{2i} - y_{1i}) \frac{x}{w} + g_{1i} \frac{x^2}{2} \\ + \frac{x^3}{12w} (-3g_{1i} + 4g_{3i} - g_{4i}) \\ + \frac{x^4}{24w^2} (g_{1i} - 2g_{3i} + g_{4i})$$

L'avantage de notre variante est que y_{3i} est maintenant une approximation correcte au second ordre en w .

La valeur moins approchée y_{2i} n'est pas employée pour le calcul des valeurs finales.

On peut donc espérer que les erreurs d'ordre supérieur au quatrième, dont la méthode ne tient pas compte, seront moins importantes pour notre variante que pour celle de Runge-Kutta.

La seule modification à apporter dans la démonstration est que dans (12) f_{3i} est remplacé par

$$(12') \quad f_{3i} = \alpha + w B_i + w^2 \left(C_i + \frac{1}{2} D_i \right) + w^3 \left(H + \frac{1}{2} E_i + \frac{1}{2} F_i \right)$$

Les autres valeurs ne sont pas modifiées. La nouvelle valeur de $2f_{3i}$ est donc la même que l'ancienne valeur de $f_{2i} + f_{3i}$.

Le détail du calcul des termes du troisième ordre demande quelque soin ; mais il semble inutile d'y insister puisque la justification de notre variante résulte des formules étudiées par Runge.

On peut introduire une grande simplification dans le calcul en assimilant g_{4i} à g_{5i} dans les formules précédentes.

Il devient alors inutile de calculer g_{2i} et g_{4i} . La précision de y_{5i} n'est pas diminuée mais celle de z_{5i} est réduite au troisième ordre.

Au lieu des formules (7') on emploiera donc

$$y_{3i} = y_{1i} + w z_{0i} + \frac{1}{2} w^2 g_{1i}$$

$$(7'') \quad y_{5i} = y_{1i} + 2w z_{0i} + \frac{1}{3} w^2 (2g_{1i} + 4g_{3i})$$

$$z_{5i} = z_{0i} + \frac{w}{3} (g_{1i} + 4g_{3i} + g_{5i})$$

et on remplacera l'indice quatre par l'indice cinq dans la formule (8').

Sur les tétraèdres orthologiques

PAR

M. V. THÉBAULT. Tennie (France)

Deux tétraèdres $T \equiv ABCD$, $T' \equiv A'B'C'D'$ sont *orthologiques* ou *orthologiques gauches* si les perpendiculaires menées des sommets du tétraèdre T sur les plans des faces du tétraèdre T' sont concourantes ou génératrices d'un même système réglé ⁽¹⁾. (STEINER, J. NEUBERG).

Ces correspondances orthologiques entre deux tétraèdres T , T' en entraînent une autre qui mérite d'être signalée et qui s'applique aussi à deux quadrangles gauches.

1. LEMME. Si les sommets du quadrangle gauche $Q \equiv ABCD$ sont les centres des sphères (A) , (B) , (C) , (D) , ceux du quadrangle gauche $Q' \equiv A'B'C'D'$ les centres des sphères (A') , (B') , (C') , (D') , les rayons étant tous arbitraires, et que l'on désigne respectivement par (AB) , (BC) , (CD) , (DA) les sommes des différences des puissances des sommets A et B , B et C , C et D , D et A du quadrangle Q , par rapport aux sphères (A') et (B') , (B') et (C') , (C') et (D') , (D') et (A') , par $(A'B')$, $(B'C')$, $(C'D')$, $(D'A')$ les sommes correspondantes pour les sommets A' et B' , B' et C' , C' et D' , D' et A' du quadrangle Q' , par rapport aux sphères (A) et (B) , (B) et (C) , (C) et (D) , (D) et (A) , on a, en grandeur et en signe, la relation

$$(AB) + (BC) + (CD) + (DA) + (A'B') + (B'C') + (C'D') + (D'A') = 0. \quad (1)$$

En désignant les rayons des sphères (A') , (B') , (C') , (D') par $R_{A'}$, $R_{B'}$, $R_{C'}$, $R_{D'}$, on a, d'abord, l'égalité

$$(AB) = \overline{AA'}^2 - R_{A'}^2 - (\overline{AB'}^2 - R_{B'}^2) + \overline{BA'}^2 - R_{A'}^2 - (\overline{BB'}^2 - R_{B'}^2),$$

puis trois autres égalités analogues pour les sommes (BC) , (CD) , (DA) , en procédant de proche en proche.

Si l'on ajoute ces quatre égalités, les carrés des rayons des sphères (A') , (B') , (C') , (D') disparaissent ainsi que $\overline{AA'}^2$, $\overline{BB'}^2$, $\overline{CC'}^2$, $\overline{DD'}^2$, et il reste

$$(AB) + (BC) + (CD) + (DA) = \Sigma (\overline{A'B}^2 - \overline{AB'}^2).$$

Par analogie,

$$(A'B') + (B'C') + (C'D') + (D'A') = \Sigma (\overline{AB'}^2 - \overline{A'B}^2),$$

d'où l'égalité (1).

⁽¹⁾ Cfr. CL. SERVAIS, *Bull. de l'Académie Royale*, 1934 (10^e, 11^e et 12^e communications). — J. BILO, *Mathesis*, 1936, 369 à 372.

N. B. Ce Lemme subsiste pour deux polygones fermés plans ou gauches d'un même nombre quelconque de côtés.

2. Théorème. *Si les plans perpendiculaires menés par les milieux des côtés du quadrangle gauche $Q \equiv ABCD$ sur les côtés correspondants du quadrangle gauche $Q' \equiv A'B'C'D'$ concourent en un point O' , les plans perpendiculaires menés par les milieux des côtés du quadrangle Q' sur les côtés correspondants du quadrangle Q concourent en un point O .*

Les plans menés par les milieux des côtés AB, BC, CD, DA du quadrangle Q perpendiculairement aux côtés $A'B', B'C', C'D', D'A'$ du quadrangle Q' se confondent avec les plans radicaux des sphères $(A'), (B'), (C'), (D')$, de rayons $R_{A'}, R_{B'}, R_{C'}, R_{D'}$, et passant par le point O' . Les distances des points A et B au plan radical qui passe par le milieu de AB étant égales et de signes contraires, il en est de même des différences des puissances de ces points par rapport aux sphères (A') et (B') . Si $(A')_A$ représente la puissance du point A pour la sphère (A') , on a, avec les notations précédentes (1), la relation

$$(AB) = (A')_A - (B')_A + (A')_B - (B')_B = 0,$$

ou

$$(AB) = \overline{AA'}^2 - R_{A'}^2 - (\overline{AB'}^2 - R_{B'}^2) + \overline{BA'}^2 - R_{A'}^2 - (\overline{BB'}^2 - R_{B'}^2) = 0,$$

puis trois égalités similaires pour $(BC), (CD), (DA)$.

Si l'on ajoute les quatre égalités ainsi obtenues, on obtient

$$(AB) + (BC) + (CD) + (DA) = \Sigma (\overline{A'B}^2 - \overline{AB'}^2) = 0,$$

et, en vertu du Lemme précédent,

$$(A'B') + (B'C') + (C'D') + (D'A') = \Sigma (\overline{AB'}^2 - \overline{A'B}^2) = 0. \quad (2)$$

Or, les plans perpendiculaires aux côtés AB, BC, CD du quadrangle gauche Q menés par les milieux des côtés $A'B', B'C', C'D'$ du quadrangle Q' se coupent en un point O_1 par où passent quatre sphères $(A), (B), (C), (D)$. Pour les sphères $(A), (B), (C)$, on a déjà

$$(A'B') + (B'C') + (C'D') = 0,$$

de sorte que, eu égard à l'égalité (2), $(D'A') = 0$.

Le plan radical des sphères (D) et (A) passe donc par le milieu du côté $D'A'$ du quadrangle Q' , et $O_1 \equiv O$.

Les deux quadrangles Q, Q' sont *orthologiques par les milieux des arêtes correspondantes*; les points O, O' sont leurs *centres d'orthologie*.

Note. 1° Si au lieu des côtés correspondants AB et $A'B', BC$ et $B'C', CD$ et $C'D', DA$ et $D'A'$ des quadrangles Q, Q' , on associe les côtés opposés AB et $C'D', BC$ et $D'A', CD$ et $A'B', DA$ et $B'C'$, et *vice versa*, les quadrangles Q, Q' se correspondent dans une autre orthologie par les milieux des côtés opposés, les centres d'orthologie étant confondus avec les symétriques des centres O, O' par rapport aux barycentres des sommets des quadrangles Q, Q' .

2° Les égalités évidentes

$$\overline{A'B}^2 - \overline{AB'}^2 + \overline{B'C}^2 - \overline{BC'}^2 + \overline{C'D}^2 - \overline{CD'}^2 + \overline{D'A}^2 - \overline{DA'}^2 = 0,$$

$$\overline{A'A}^2 - \overline{AC'}^2 + \overline{B'B}^2 - \overline{BD'}^2 + \overline{C'C}^2 - \overline{CA'}^2 + \overline{D'D}^2 - \overline{DB'}^2 = 0,$$

$$\overline{A'D}^2 - \overline{AD'}^2 + \overline{B'A}^2 - \overline{BA'}^2 + \overline{C'B}^2 - \overline{CB'}^2 + \overline{D'C}^2 - \overline{DC'}^2 = 0,$$

$$\overline{A'C}^2 - \overline{AA'}^2 + \overline{B'D}^2 - \overline{BB'}^2 + \overline{C'A}^2 - \overline{CC'}^2 + \overline{D'B}^2 - \overline{DD'}^2 = 0,$$

expriment que les quadrangles gauches ABCD et A'B'C'D', ABCD et B'C'D'A', ABCD et C'D'A'B', ABCD et D'A'B'C' sont orthologiques par les milieux des côtés correspondants (ou opposés). Si deux ou trois de ces égalités existent, à la fois, les quadrangles gauches Q, Q' sont doublement ou quadruplement orthologiques par les milieux des côtés correspondants (ou opposés).

3. Théorème. *Si les plans perpendiculaires menés par les milieux des arêtes du tétraèdre T \equiv ABCD sur les arêtes correspondantes (ou opposées) du tétraèdre T' \equiv A'B'C'D' concourent en un point O', les plans perpendiculaires menés par les milieux des arêtes du tétraèdre T' sur les arêtes correspondantes (ou opposées) du tétraèdre T concourent en un point O.*

Soient A₁, B₁, C₁, A'₁, B'₁, C'₁ et a₁, b₁, c₁, a'₁, b'₁, c'₁ les milieux des arêtes BC, CA, AB, DA, DB, DC et B'C', C'A', A'B', D'A', D'B', D'C' des tétraèdres T et T'.

Si les plans perpendiculaires aux arêtes du tétraèdre T' menés par les milieux des arêtes correspondantes (ou opposées) du tétraèdre T concourent en un point O', les arêtes de ces tétraèdres forment les quadrangles gauches orthologiques par les milieux des arêtes correspondantes (ou opposées),

ABCD et A'B'C'D', ABDC et A'B'D'C', ADBC et A'D'B'C'.

Les plans perpendiculaires aux côtés AB, BC, CD, DA du quadrangle gauche ABCD menés par les milieux c₁, a₁, c'₁, a'₁ des côtés correspondants du quadrangle gauche A'B'C'D' concourent déjà en un point O₁, par lequel passent aussi les plans perpendiculaires aux arêtes AC et BD de T menés par les milieux b₁ et b'₁ des arêtes correspondantes A'C' et B'D' de T' en raison de l'orthologie des quadrangles gauches ADBC et A'D'B'C'. Le théorème est donc démontré.

Autrement, les triangles a₁ b₁ c₁ et A₁ B₁ C₁ (ou ABC), c₁ a'₁ b'₁ et C₁ A'₁ B'₁ (ou CAB) sont orthologiques ⁽¹⁾. Les plans perpendiculaires menés par les points a₁, b₁, c₁ sur les côtés BC, CA, AB du triangle de la

(1) Si les plans perpendiculaires menés par les sommets du triangle ABC sur les côtés correspondants du triangle A'B'C' passent par une même droite d', les plans perpendiculaires menés par les sommets du triangle A'B'C' sur les côtés correspondants du triangle ABC passent par une même droite d.

Les deux triangles sont orthologiques ; les droites d, d' sont leurs axes d'orthologie respectifs. (GL. SERVAIS, 1924, loc. cit.)

face ABC passent par une droite d_a et les plans perpendiculaires aux côtés AB, DA, DB du triangle de la face DAB menés par les points c_1, a'_1, b'_1 passent par une droite d_c . Ces droites d_a, d_c , situées dans le plan mené par le point c_1 perpendiculairement à l'arête AB de T se coupent au point O_1 par lequel passent déjà cinq plans menés par les milieux des arêtes du tétraèdre T'. Le sixième, mené par le point c'_1 perpendiculaire à l'arête DC et qui contient la droite d_c passe aussi par le point O_1 , et $O_1 \equiv O$.

Les tétraèdres T, T' sont *orthologiques par les milieux des arêtes correspondantes* ; les points O, O' sont leurs *centres d'orthologie* respectifs.

Note. Si l'on remplace les arêtes correspondantes par les arêtes opposées, les tétraèdres T, T' se correspondent dans une seconde orthologie dont les centres se confondent avec les symétriques des points O, O', par rapport aux centres de gravité de ces tétraèdres.

COROLLAIRE. *Si les triangles de trois faces du tétraèdre T sont orthologiques aux triangles des faces correspondantes du tétraèdre T', les triangles des faces restant sont aussi orthologiques.*

COROLLAIRE. *Si les triangles des faces du tétraèdre T sont orthologiques aux triangles des faces correspondantes du tétraèdre T', les deux tétraèdres sont orthologiques par les milieux des arêtes correspondantes (ou opposées).*

COROLLAIRE. *Si les tétraèdres T, T' sont orthologiques par les milieux des arêtes correspondantes (ou opposées), ils sont orthologiques gauches et réciproquement.*

Car les triangles des faces des tétraèdres T, T' sont orthologiques ⁽¹⁾. Les axes d'orthologie des triangles $A'_1 B'_1 C'_1$ et $A' B' C'$, ..., et $a_1 b_1 c_1$ et ABC, ..., sont les transformés des axes d'orthologie des triangles ABC et $A' B' C'$, ..., $A' B' C'$ et ABC, ..., qui se confondent avec les génératrices de deux systèmes d'un même hyperboloïde, par des homothéties de module $-\frac{1}{2}$ dont les centres coïncident avec les barycentres des faces des tétraèdres T et T'.

COROLLAIRE. *Si les tétraèdres ABCD, A'B'C'D' sont orthologiques gauches, et si les points A_1, B_1, C_1, D_1 partagent les distances AA', BB', CC', DD' dans le même rapport k, les tétraèdres ABCD et $A_1 B_1 C_1 D_1$ sont orthologiques gauches, de même que les tétraèdres A'B'C'D' et $A_1 B_1 C_1 D_1$.*

Car les triangles des faces correspondantes des tétraèdres ABCD et $A_1 B_1 C_1 D_1$, A' B' C' D' et $A_1 B_1 C_1 D_1$ sont orthologiques ⁽²⁾.

4. CAS PARTICULIERS. a) Quand les tétraèdres T, T' coïncident, les centres d'orthologie O, O' par les milieux des arêtes correspondantes se confondent avec le centre de la sphère qui leur est circonscrite et les centres d'orthologie par les milieux des arêtes opposées coïncident avec le symétrique du

⁽¹⁾ Cfr. J. BILO, *Mathesis*, 1936 — 371.

⁽²⁾ Cfr. B. M. BARBALATT, *Mathesis*, 1926 — 133.

centre de la sphère circonscrite par rapport au centre de gravité des tétraèdres T, T' . On trouve ainsi la détermination classique du point de MONGE d'un tétraèdre.

b) Si les sommets A', B', C', D' du tétraèdre T' coïncident avec les pieds des hauteurs AA', BB', CC', DD' du tétraèdre T , les tétraèdres T, T' sont orthologiques gauches ⁽¹⁾ et, par suite, orthologiques par les milieux de leurs arêtes correspondantes (ou opposées) avec O, O' pour centres d'orthologie. Or, les sphères décrites sur les arêtes de T comme diamètres se rencontrent deux par deux aux sommets de T' , et le centre O' d'orthologie se confond avec le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre T' . En outre, les puissances du milieu de l'arête $B'C'$, par rapport aux sphères $(B, BB'), (C, CC')$, sont égales et de signes contraires, car si la droite $B'C'$ rencontre ces sphères en B'', C'' , les milieux de $B'C'$ et $B''C''$ coïncident. Le centre O d'orthologie se confond donc avec le centre radical des sphères $(A, AA'), (B, BB'), (C, CC'), (D, DD')$, centrées en A, B, C, D et ayant pour rayon les hauteurs du tétraèdre T ⁽²⁾.

Les centres d'orthologie par les milieux des arêtes opposées coïncident avec les symétriques des points O, O' par rapport aux centres de gravité des tétraèdres T, T' .

5. Théorème. *Si deux tétraèdres $T \equiv ABCD, T' \equiv A'B'C'D'$ sont orthologiques par les milieux des arêtes correspondantes et que les deux octaèdres ayant pour sommets les milieux des arêtes soient perspectifs, le centre de perspective et les deux centres d'orthologie des tétraèdres sont collinéaires.*

Les axes de perspective des triangles complémentaires $A_1 B_1 C_1, \dots$, des triangles des faces ABC, \dots , du tétraèdre T et des triangles complémentaires $a_1 b_1 c_1, \dots$, des triangles des faces $A'B'C', \dots$, du tétraèdre T' se confondent avec les intersections $\Delta_d, \Delta_c, \Delta_b, \Delta_a$ des plans ABC et $A'B'C', \dots$. Or, les axes d'orthologie des triangles perspectifs $a_1 b_1 c_1, A_1 B_1 C_1$ sont situés dans un même plan passant par le centre S de perspective des octaèdres $a_1 b_1 c_1 a'_1 b'_1 c'_1, A_1 B_1 C_1 A'_1 B'_1 C'_1$, perpendiculaire à l'axe de perspective Δ_d ⁽³⁾ et ainsi de suite pour les autres couples de triangles perspectifs.

Les quatre plans ainsi obtenus passent donc par une même droite Δ contenant les points S, O, O' et parallèle à chacune des plus courtes distances des axes $\Delta_a, \Delta_b, \Delta_c, \Delta_d$ pris deux à deux qui sont donc situés respectivement dans des plans parallèles normaux à Δ .

(Janvier 1947).

⁽¹⁾ J. NEUBERG, *Mémoire sur le tétraèdre*, 1884, p. 28.

⁽²⁾ V. THÉBAULT, *Comptes-Rendus*, Paris, 1944 — 263.

⁽³⁾ Cfr. CL. SERVAIS. *Bull. de l'Académie royale*, 1924 — 171.

Anneaux finis; Systèmes hypercomplexes de rang deux sur un corps

PAR

ROBERT BALLIEU

0. — Après avoir noté que tout anneau fini est soit un anneau d'ordre puissance d'un nombre premier, soit composé direct de pareils anneaux et avoir indiqué une condition nécessaire et suffisante pour qu'une multiplication définie dans un module fini soit distributive par rapport à l'addition, nous déterminons dans cet article tous les anneaux finis cycliques d'ordre puissance d'un nombre premier et tous les anneaux d'ordre carré d'un nombre premier; par le fait même, les classes suivantes d'anneaux finis d'ordre décomposé en facteurs premiers sont déterminées : 1^o) celles des anneaux à module cyclique, 2^o) celle des anneaux dont l'ordre n'est divisible par aucun cube.

Nous avons également déterminé tous les anneaux dont l'ordre est le cube d'un nombre premier; ces résultats seront publiés ultérieurement.

La méthode de détermination des anneaux d'ordre carré d'un nombre premier s'applique aussi à la détermination des systèmes hypercomplexes de rang deux sur un corps commutatif qui ne sont pas eux-mêmes des corps; en terminant, nous examinons aussi ceux de ces systèmes qui sont des corps.

1. — Appelons ordre d'un élément d'un anneau, l'ordre de cet élément par rapport à l'anneau considéré comme module. La distributivité de la multiplication par rapport à l'addition entraîne que l'ordre d'un produit est un commun diviseur des ordres des facteurs; en particulier, le produit de deux éléments d'ordres premiers entre eux est nul. D'autre part, l'ordre de la somme de deux éléments est un diviseur du plus petit commun multiple des ordres des deux termes. Par conséquent, *dans tout anneau, l'ensemble des éléments dont l'ordre divise un nombre fixe et celui des éléments dont l'ordre est puissance d'un même nombre premier sont des idéaux bilatères de l'anneau et*

le produit de deux pareils idéaux correspondant à des nombres fixes, ou à des nombres premiers fixes, premiers entre eux, est nul. En particulier, si l'anneau considéré est d'ordre fini n admettant la décomposition

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}, \quad (k > 1, p_i \text{ premier } (1), p_i \neq p_j \text{ si } i \neq j),$$

l'anneau est, comme module, somme directe des k sous-modules \mathbf{A}_i formés respectivement des $p_i^{\alpha_i}$ éléments dont l'ordre est une puissance de p_i (2); en vertu des remarques précédentes, \mathbf{A}_i est idéal bilatère de \mathbf{A} et chaque produit $\mathbf{A}_i \mathbf{A}_j$, ($i \neq j$), est nul; l'anneau est composé direct (3) des \mathbf{A}_i c'est-à-dire : tout anneau fini est soit un anneau d'ordre puissance d'un nombre premier, soit composé direct de pareils anneaux.

2. — Le problème de déterminer tous les anneaux finis d'ordre p^m où p , premier, et m , positif, sont des entiers donnés, est évidemment résoluble en un nombre fini d'opérations et se ramène à celui partant d'un module \mathbf{M} , d'ordre p^m , de type $(p^{m_1}, p^{m_2}, \dots, p^{m_r})$, ($m_1 + m_2 + \dots + m_r = m$), et de base $\{a_1, a_2, \dots, a_r\}$ où a_i est d'ordre p^{m_i} , de définir dans ce module une multiplication associative et distributive par rapport à l'addition. Cette multiplication est entièrement définie à partir des produits $a_i a_j$ par la formule

$$(1) \quad \left(\sum_1^r \alpha_i a_i \right) \left(\sum_1^r \beta_j a_j \right) = \sum_i \sum_j [(\alpha_i \beta_j) (a_i a_j)], \quad (0 \leq \alpha_k, \beta_k < p^{m_k}).$$

D'après le paragraphe 1, une condition nécessaire de la distributivité de la multiplication ainsi définie est que l'ordre de chaque produit $a_i a_j$ soit un diviseur commun des ordres des deux facteurs. Cette condition est aussi suffisante. En effet,

$$(2) \quad a = \sum_1^r \alpha_i a_i; \quad b = \sum_1^r \beta_i a_i; \quad c = \sum_1^r \gamma_i a_i, \quad (0 \leq \alpha_i, \beta_i, \gamma_i < p^{m_i}),$$

désignant des éléments quelconques de \mathbf{M} et ξ_i , ($i = 1, 2, \dots, r$), étant posé égal à 0 ou à 1 suivant que $(\alpha_i + \beta_i)$ est inférieur ou non à p^{m_i} ,

(1) Tout nombre premier intervenant dans cet article est différent de 1.

(2) Cfr. SPEISER, Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung, 3^e éd., Berlin, Springer, 1937, p. 49.

(3) Cfr. BOURBAKI, Algèbre, Ch. I, Paris, Hermann, 1942, p. 133. Le fait que l'anneau soit somme directe d'idéaux bilatères suffit pour que l'anneau soit composé direct de ces idéaux; cfr. VAN DER WAERDEN, Moderne Algebra, II 2^e éd., Berlin, Springer, 1940, p. 150.

nous avons

$$(a + b) c = \sum_i \sum_j \{ [(a_i + \beta_i - \xi_i p^{m_i}) \gamma_j] (a_i a_j) \};$$

si l'ordre de $a_i a_j$ divise l'ordre de a_i , le produit $p^{m_i} (a_i a_j)$ est nul et l'on a

$$(a + b) c = \sum_i \sum_j \{ [(a_i + \beta_i) \gamma_j] (a_i a_j) \} = ac + bc;$$

de la même façon, si l'ordre de $a_i a_j$ divise l'ordre de a_j , nous aurons

$$c(a + b) = ca + cb, \quad (1).$$

Utilisant les expressions des produits $a_i a_j$ au moyen de la base $\{a_k\}$ par les formules

$$(3) \quad a_i a_j = \sum \alpha_{ij}^k a_k \quad (0 \leq \alpha_{ij}^k < p^{m_k}),$$

la condition indiquée revient à celle que pour tout triple i, j, k , le coefficient α_{ij}^k soit divisible par $p^{m_k - \min[m_i, m_j]}$.

Si l'on était parti d'un module d'invariants $(p_1^{m_1}, p_2^{m_2}, \dots, p_r^{m_r})$ et de base $[a_1, a_2, \dots, a_r]$ où a_i est d'ordre $p_i^{m_i}$, la première forme de la condition nécessaire et suffisante n'aurait pas changé tandis que la seconde serait devenue : Pour tout triple i, j, k tels que deux au moins des nombres p_i, p_j, p_k sont distincts, α_{ij}^k est nul; pour tout triple tel que ces nombres soient égaux à un même nombre premier p , α_{ij}^k est divisible par $p^{m_k - \min[m_i, m_j]}$.

3. — Considérons maintenant un anneau \mathbf{A} de module cyclique, d'ordre égal à une puissance p^m , ($m \geq 1$), d'un nombre premier et d'élément de base a . La multiplication dans \mathbf{A} est complètement définie par la relation

$$(4) \quad a^2 = la, \quad (0 < l \leq p^m).$$

Si l n'est pas une puissance de p , soit p^i , ($i < m$), la plus haute puissance de p divisant l ; le quotient q de l par p^i étant premier avec p , il existe un entier x tel que $xq \equiv 1, \text{ mod } (p^{m-i})$, ⁽²⁾; x est premier avec p et $a' = xa$ est donc aussi élément de base de \mathbf{A} ; de plus

$$(a')^2 = x^2 la = (xq) p^i xa = p^i a'.$$

(1) On voit que la condition que l'ordre de $(a_i a_j)$ soit diviseur de l'ordre de a_i est nécessaire et suffisante pour la distributivité à droite tandis que celle que cet ordre soit diviseur de celui de a_j est nécessaire et suffisante pour la distributivité à gauche.

(2) Cfr. SPEISER, ouvrage cité, p. 56.

Par conséquent, tous les anneaux \mathbf{A} du type indiqué, s'obtiennent déjà en donnant à l dans (4) les valeurs p^i ($i = 0, 1, 2, \dots, m$). Les anneaux ainsi obtenus sont deux à deux différents car l'anneau correspondant à p^i renferme des produits d'ordre p^{m-i} et ne renferme aucun produit d'ordre supérieur. L'anneau correspondant à p^i est isomorphe à l'anneau des classes kp^i de l'anneau des classes de reste modulo p^{m+i} ⁽¹⁾. Ainsi : Si p est un nombre premier et m un entier positif, les $(m + 1)$ anneaux obtenus en considérant pour chaque valeur $0, 1, 2, \dots, m$ de i , l'anneau des classes kp^i de l'anneau des classes de restes modulo p^{m+i} sont distincts deux à deux. Tout anneau à module cyclique d'ordre p^m est isomorphe à un de ces anneaux ; a étant un élément de base, l'exposant caractéristique i est celui de la plus haute puissance de p divisant le coefficient l , ($0 < l \leq p^m$) de l'expression la du carré de a comme multiple entier de a . En outre, comme tout sous-module d'un module cyclique est aussi cyclique, les considérations du paragraphe 2 montrent que tout anneau fini à module cyclique et d'ordre non puissance d'un nombre premier est composé direct d'anneaux du type venant d'être caractérisé.

4. — Envisageons maintenant les anneaux d'ordre carré d'un nombre premier. Le résultat est : Pour chaque nombre premier p , il y a, aux isomorphismes près, exactement, outre les trois anneaux d'ordre p^2 de module cyclique obtenus au paragraphe précédent, huit anneaux d'ordre p^2 et de module non cyclique.

Le module de tout anneau non cyclique d'ordre p^2 étant du type (p, p) et un tel anneau étant ainsi un système hypercomplexe de rang 2 sur \mathbf{Z}_p , le résultat précédent se déduit du fait qu'il n'y a qu'un champ de Galois d'ordre p^2 et de celui, encore à établir, que : Etant donné un corps commutatif Δ , il n'y a, aux isomorphismes près, parmi les systèmes hypercomplexes de rang 2 sur Δ qui ne sont pas eux-mêmes des corps, que sept anneaux différents $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_7$.

La partie supérieure de la table ci-après indique pour chacun de ces \mathbf{A}_i un anneau de matrices sur Δ isomorphe à cet \mathbf{A}_i ; dans cette table, α_1 et α_2 prennent indépendamment l'un de l'autre toute valeur de Δ ; la partie inférieure de la table donne pour les mêmes anneaux, la table de multiplication d'une base particulière (a_1, a_2) en Δ ; les notations sont telles que a_1 et a_2 peuvent représenter res-

⁽¹⁾ Désignant par \mathbf{Z}_n l'anneau des classes de restes de l'anneau \mathbf{Z} des nombres entiers suivant le module n et par $\mathbf{Z}_{n,m}$ le sous-anneau de \mathbf{Z}_n formé des multiples entiers de la classe renfermant l'entier m , l'anneau correspondant à p^i peut se noter $\mathbf{Z}_{p^{m+i}}, p^i$.

pectivement les matrices correspondant la première aux valeurs 1 et 0 de α_1 et α_2 , la seconde aux valeurs 0 et 1; le fait que les produits $a_i a_j$ s'expriment en Δ au moyen de a_1 et a_2 suffit alors à montrer que les ensembles de matrices indiqués sont bien des anneaux.

	\mathbf{A}_1	\mathbf{A}_2	\mathbf{A}_3	\mathbf{A}_4	\mathbf{A}_5	\mathbf{A}_6	\mathbf{A}_7
	$\begin{vmatrix} 0 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} \alpha_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 0 & \alpha_2 & \alpha_1 \\ 0 & 0 & \alpha_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ 0 & \alpha_1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} \alpha_1 & 0 \\ \alpha_2 & 0 \end{vmatrix}$
$a_1 a_1$	0	0	0	a_1	a_1	a_1	a_1
$a_1 a_2$	0	0	0	0	a_2	a_2	0
$a_2 a_1$	0	0	0	0	a_2	0	a_2
$a_2 a_2$	0	a_2	a_1	a_2	0	0	0

Seuls \mathbf{A}_6 et \mathbf{A}_7 ne sont pas commutatifs; l'un est l'opposé ⁽¹⁾ de l'autre. \mathbf{A}_1 , \mathbf{A}_2 et \mathbf{A}_4 sont composés directs des idéaux (a_1) et (a_2) ; de façon plus précise, Δ_1 désignant l'anneau de carré nul isomorphe comme module à Δ , \mathbf{A}_1 est isomorphe au produit $\Delta_1 \times \Delta_1$, \mathbf{A}_2 au produit $\Delta_1 \times \Delta$ et \mathbf{A}_4 au produit $\Delta \times \Delta$.

5. — Il nous reste à établir que tout système hypercomplexe de rang deux sur Δ et qui n'est pas lui-même un corps, est isomorphe à un des sept anneaux \mathbf{A}_i indiqués ci-dessus et qu'aucun des \mathbf{A}_i n'est isomorphe à un autre des \mathbf{A}_i .

Désignant une fois pour toutes par \mathbf{A} un de ces systèmes, par \mathbf{G} son annulateur gauche et par \mathbf{D} son annulateur droitier, nous examinerons successivement chacune des hypothèses exhaustives suivantes :

I. Il existe une base (a_1, a_2) de \mathbf{A} où a_1 appartient à \mathbf{G} et a_2 à \mathbf{D} .

II. \mathbf{G} et \mathbf{D} sont tous deux différents de l'anneau-zéro mais l'hypothèse I n'est pas vérifiée.

III. \mathbf{D} se réduit à l'élément zéro mais \mathbf{A} renferme des diviseurs de zéro.

IV. \mathbf{G} se réduit à l'élément zéro mais \mathbf{A} renferme des diviseurs de zéro.

V. \mathbf{A} n'a pas de diviseurs de zéro.

⁽¹⁾ inverse-isomorphe.

I. Nous avons pour la base (a_1, a_2) de l'hypothèse :

$$a_1a_1 = a_1a_2 = a_2a_2 = 0 ; \quad a_2a_1 = \alpha_1a_1 + \alpha_2a_2 , \quad (\alpha_i \in \Delta) ;$$

et donc aussi

$$(a_2a_1)a_1 = \alpha_2a_2a_1 ; \quad a_2(a_1a_1) = 0 ; \quad (a_2a_2)a_1 = 0 ; \quad a_2(a_2a_1) = \alpha_1a_2a_1 ;$$

d'où en vertu de l'associativité, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. \mathbf{A} est de carré nul et isomorphe à \mathbf{A}_1 .

II. Dans ce cas, \mathbf{A} n'est certainement pas isomorphe à \mathbf{A}_1 . L'hypothèse entraîne que \mathbf{G} et \mathbf{D} sont identiques l'un à l'autre ⁽¹⁾ et distincts de \mathbf{A} . Désignons par a_1 un élément annulateur non nul et par a_2 un élément non annulateur ; a_1 et a_2 forment une base et nous avons

$$a_1a_1 = a_1a_2 = a_2a_1 = 0 ; \quad a_2a_2 = \alpha_1a_1 + \alpha_2a_2 , \quad (\alpha_i \in \Delta) ,$$

α_1 et α_2 n'étant pas tous deux nuls.

Si α_2 n'est pas nul, nous avons

$$(\alpha_2^{-2}a_2^2)^2 = (\alpha_2^{-2}\alpha_1a_1 + \alpha_2^{-1}a_2)^2 = \alpha_2^{-2}a_2^2 ;$$

et remplaçant, dans la base, a_2 par $\alpha_2^{-2}a_2^2$, nous voyons que dans ce cas \mathbf{A} a une base (a_1, a'_2) satisfaisant à

$$a_1a_1 = a_1a'_2 = a'_2a_1 = 0 ; \quad a'_2a'_2 = a'_2$$

et est isomorphe à \mathbf{A}_2 .

Si α_2 est nul, α_1 ne l'est pas ; remplaçant dans la base a_1 par α_1a_1 , nous obtenons une base (a'_1, a_2) où

$$a'_1a'_1 = a'_1a_2 = a_2a'_1 = 0 ; \quad a_2^2 = a'_1 ;$$

\mathbf{A} est isomorphe à \mathbf{A}_3 .

\mathbf{A}_3 étant de cube nul et \mathbf{A}_2 ne l'étant pas, \mathbf{A}_2 et \mathbf{A}_3 ne sont pas isomorphes.

III. Dans ce cas, \mathbf{A} n'est isomorphe à aucun des anneaux $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3$.

Soit a un quelconque diviseur gaucher de zéro, b un élément non nul annulateur droitier de a . L'annulateur à gauche \mathbf{G}_b de b est un module en Δ , distinct de \mathbf{A} , puisque b n'est pas annulateur droitier de \mathbf{A} , et du module zéro, puisque \mathbf{G}_b renferme a ; \mathbf{G}_b est donc le module en Δ de base a ; ce dernier renferme donc le module $\mathbf{A}a$ en Δ qui ne se réduit pas au module zéro puisque a n'est pas annula-

⁽¹⁾ Nous utilisons le fait que l'annulateur, à gauche ou à droite, dans un système hypercomplexe fini en Δ , d'un sous-ensemble de ce système est un module en Δ .

teur droitier de \mathbf{A} . Par conséquent quel que soit le diviseur gaucher de zéro a , $\mathbf{A}a$ se réduit au module en Δ de base a .

Il résulte de là que les éléments de \mathbf{A} ne sont pas tous diviseurs gauchers de zéro. Il suffit d'établir cette dernière affirmation dans l'hypothèse où \mathbf{A} a une base (a_1, a_2) formée déjà de deux diviseurs gauchers de zéro. Dans ce cas, on aura par ce qui précède

$$a_i a_j = a_{ij} a_j \quad , \quad (i, j = 1, 2; a_{ij} \in \Delta),$$

où, l'annulateur à droite de \mathbf{A} se réduisant à l'élément zéro, α_{11} et α_{21} ne sont pas tous deux nuls non plus que α_{12} et α_{22} . Soient x_0 et y_0 deux éléments de Δ tels que $(x_0 \alpha_{1i} + y_0 \alpha_{2i})$, $(i = 1, 2)$, soient différents de zéro ⁽¹⁾. Le produit

$$(x_0 a_1 + y_0 a_2) (\xi a_1 + \eta a_2) = \xi (x_0 \alpha_{11} + y_0 \alpha_{21}) a_1 + \eta (x_0 \alpha_{12} + y_0 \alpha_{22}) a_2$$

n'est nul que si ξ et η sont tous deux nuls; $x_0 a_1 + y_0 a_2$ n'est pas diviseur gaucher de zéro.

Or, si un système hypercomplexe \mathbf{A} de rang fini v sur le corps commutatif Δ renferme un élément a non diviseur gaucher de zéro, a est diviseur gaucher de tout élément de \mathbf{A} et \mathbf{A} possède un élément unité au moins gaucher ⁽²⁾. Car $a\mathbf{A}$ est un module en Δ de rang v sur Δ puisque, a n'étant pas diviseur gaucher de zéro, l'indépendance linéaire par rapport à Δ des éléments (a_1, a_2, \dots, a_v) de \mathbf{A} entraîne celle des éléments $(aa_1, aa_2, \dots, aa_v)$ de $a\mathbf{A}$; par conséquent, nous avons déjà $a\mathbf{A} = \mathbf{A}$; en particulier, il existe un élément e tel que $ae = a$ et puisque, quel que soit y ,

$$ay = (ae)y = a(e\bar{y}),$$

nous avons, a n'étant pas diviseur gaucher de zéro, $y = ey$ pour tout y ; e est élément-unité gaucher. On retrouve aussi le fait connu : Si le système hypercomplexe \mathbf{A} de rang v sur le corps commutatif Δ n'a aucun diviseur de zéro, ce système est un corps ⁽³⁾, nécessairement commutatif si le rang v de \mathbf{A} sur Δ est deux.

Revenant à un anneau \mathbf{A} de l'hypothèse III, nous pouvons dire qu'il possède un élément-unité au moins gaucher.

(1) Il suffit de considérer la partition des éléments non nuls du module en Δ des couples (x, y) d'éléments de Δ en classes formées des multiples non nuls en Δ d'un élément non nul de module pour s'assurer que le couple (x_0, y_0) existe.

(2) Cfr. VAN DER WAERDEN, ouvrage cité, p. 136, Ex. 2 où se trouve énoncée la proposition analogue pour un diviseur bilatère de zéro.

(3) Cfr. VAN DER WAERDEN, ouvrage cité, p. 136. Ex. 1.

Si cet élément-unité est bilatère, prenons le comme élément a_1 d'une base (a_1, a_2) ; nous pouvons choisir pour a_2 un quelconque diviseur gaucher et nous avons

$$a_1 a_j = a_j a_1 = a_j, \quad (j = 1, 2); \quad a_2^2 = \alpha a_2.$$

Si α est nul, \mathbf{A} est isomorphe à \mathbf{A}_5 ; s'il ne l'est pas, prenons comme nouveaux éléments de base

$$a'_1 = a_1 - \alpha^{-1} a_2; \quad a'_2 = \alpha^{-1} a_2;$$

nous aurons, en supprimant les accents,

$$a_1^2 = a_1; \quad a_2^2 = a_2; \quad a_1 a_2 = a_2 a_1 = 0;$$

dans ce cas, \mathbf{A} est isomorphe à \mathbf{A}_4 .

\mathbf{A}_4 et \mathbf{A}_5 ne sont pas isomorphes car dans \mathbf{A}_4 , seul le carré de zéro est nul tandis que \mathbf{A}_5 renferme des éléments non nuls de carré nul.

Si l'élément-unité de \mathbf{A} est strictement gaucher, \mathbf{A} n'est d'abord isomorphe ni à \mathbf{A}_4 ni à \mathbf{A}_5 ; de plus, \mathbf{G} ne se réduit pas à l'élément zéro ⁽¹⁾. Un élément-unité gaucher a_1 et un élément annulateur gaucher non nul a_2 peuvent servir d'éléments de base; on a alors

$$a_1 a_j = a_j; \quad a_2 a_j = 0, \quad (j = 1, 2).$$

\mathbf{A} est isomorphe à \mathbf{A}_6 .

IV. Les hypothèses III et IV dérivant l'une de l'autre par le passage d'un anneau à son opposé, les anneaux \mathbf{A} satisfaisant à IV sont les opposés de ceux satisfaisant à III. \mathbf{A}_4 et \mathbf{A}_5 , étant commutatifs, sont isomorphes à leurs opposés; \mathbf{A}_6 pour lequel \mathbf{G} est non nul et \mathbf{D} nul, n'est pas isomorphe à son opposé, \mathbf{A}_7 , dans lequel \mathbf{G} est nul et \mathbf{D} non nul. L'hypothèse IV ne fournit comme nouvel anneau que l'anneau \mathbf{A}_7 .

V. — Dans ce cas, \mathbf{A} n'est isomorphe à aucun des anneaux $\mathbf{A}_i (i = 1, 2, \dots, 7)$. De plus en vertu du théorème rappelé au cours de l'examen de l'hypothèse III, \mathbf{A} , s'il existe, est un corps; ce corps est nécessairement commutatif puisque nous pouvons choisir son élément-unité comme élément a_1 d'une base (a_1, a_2) en Δ .

Dans ce cas, la table de multiplication de \mathbf{A} est entièrement définie par

⁽¹⁾ Si ξ est élément-unité strictement gaucher d'un anneau, les éléments $(a - a\xi)$, où a parcourt l'anneau, sont tous annulateurs gauchers de l'anneau et ne sont pas tous nuls.

$$(5) \quad a_2^2 = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2, \quad (\alpha_i \in \Delta),$$

et la condition nécessaire et suffisante pour que le système hypercomplexe \mathbf{A} de rang 2 sur le corps commutatif Δ de base (a_1, a_2) , où a_1 est élément-unité et où a_2 satisfait à (5), soit un corps est que l'équation

$$x^2 - \alpha_2 x - \alpha_1 = 0$$

ne soit pas soluble en Δ . Cette condition est équivalente à la génération de \mathbf{A} comme anneau de classes de restes de $\Delta[x]$ suivant l'idéal engendré par un polynôme de degré 2 irréductible en Δ . On peut la retrouver ici en exprimant que la condition nécessaire et suffisante pour que \mathbf{A} ait des diviseurs de zéro est l'existence dans Δ d'éléments β_1 et β_2 tels que

$$(a_2 - \beta_1 a_1)(a_2 - \beta_2 a_1) = 0.$$

On peut encore obtenir les précisions suivantes.

Si le corps commutatif Δ n'est pas de caractéristique 2, chaque corps \mathbf{A} de rang 2 sur Δ est isomorphe à un des systèmes hypercomplexes en Δ de base (a_1, a_2) définie par

$$(5) \quad a_1 a_j = a_j a_1 = a_j, \quad (j = 1, 2); \quad a_2^2 = \alpha a_1, \quad (\alpha \in \Delta),$$

où α est un élément non carré de Δ ⁽¹⁾. Tout pareil système hypercomplexe est un corps. Deux éléments α dont l'un est non carré et dont l'autre est le produit par le carré d'un élément de Δ de l'image du premier dans un automorphisme de Δ et est par conséquent aussi non carré, fournissent des corps isomorphes; deux éléments non carrés non ainsi liés entre eux fournissent deux corps non isomorphes.

C'est ainsi qu'il y a autant de corps différents de rang 2 sur le corps des nombres rationnels qu'il y a de nombres entiers autres que un, positifs ou négatifs, non divisibles par le carré d'un nombre premier; l'on obtient la table de multiplication d'une base de chacun d'entre eux en faisant parcourir à α dans (5) l'ensemble de ces entiers.

Si le corps commutatif Δ est de caractéristique 2, chaque corps \mathbf{A} de rang 2 sur Δ est isomorphe soit à un des systèmes hypercomplexes en Δ de base (a_1, a_2) définie par (5), où α est un élément non carré de Δ , soit à un des systèmes hypercomplexes en Δ de base (a_1, a_2) définie par

$$(6) \quad a_1 a_j = a_j a_1 = a_j, \quad (j = 1, 2); \quad a_2^2 = \alpha a_1 + a_2, \quad (\alpha \in \Delta),$$

où α est tel que $x^2 + x + \alpha = 0$ soit insoluble en Δ . Tout pareil système hypercomplexe est un corps. Un corps de la première catégorie n'est

(1) Cfr. VAN DER WAERDEN, ouvrage cité, p. 136. Ex. 4.

jamais isomorphe à un corps de la seconde. La condition nécessaire et suffisante pour que deux éléments de Δ fournissent des corps de la première catégorie isomorphes est que l'un soit non carré et que l'autre soit la somme du carré d'un élément de Δ et du produit par un tel carré de l'image du premier dans un automorphisme de Δ ; (le second élément est alors aussi un non carré). La condition nécessaire et suffisante pour que deux éléments de Δ fournissent des corps de la seconde catégorie isomorphes est que l'un d'eux, α , soit tel que $x^2 + x + \alpha = 0$ soit insoluble en Δ et que l'autre β , soit égal à une somme $\xi^2 + \xi + \alpha'$ où ξ est un élément quelconque de Δ et où α' est l'image de α dans un automorphisme de Δ ; ($x^2 + x + \beta = 0$ est alors aussi insoluble en Δ).

Par exemple si Δ est le corps $\mathbf{Z}_2(u)$ des fonctions rationnelles de u à coefficient dans \mathbf{Z}_2 , on obtient en donnant dans (5) la valeur u à α un corps de la première catégorie; en donnant dans (6) à α la valeur 1 ou la valeur u , on obtient deux corps non isomorphes de la seconde catégorie.

Les systèmes hypercomplexes correspondant à (5), que la caractéristique de Δ soit ou ne soit pas deux, et ceux correspondant à (6) sont respectivement isomorphes, avec la même propriété de notations qu'au tableau du paragraphe 4, aux anneaux de matrice en Δ .

$$\left\| \begin{array}{cc} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha\alpha_2 & \alpha_1 \end{array} \right\| \quad ; \quad \left\| \begin{array}{cc} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha\alpha_2 & \alpha_1 + \alpha_2 \end{array} \right\|$$

6. — Indiquons encore qu'il est impossible de trouver des représentations isomorphiques de $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3$ sur des anneaux de matrices carrées à quatre éléments sur Δ ; il est aussi impossible de trouver une représentation isomorphe de \mathbf{A}_3 sur des matrices en Δ dont, à l'exception de deux éléments de positions fixes, tous les éléments soient nuls; les représentations de ces anneaux indiquées au paragraphe 4 ne peuvent donc plus être fort simplifiées.

Deuxième Section

Physique et Chimie

Le Bureau est constitué comme suit, pour l'exercice 1947-1948 :

Président : M. G. GUÉBEN.

Vice-Président : M. J. M. DELFOSSE.

Secrétaire : M. R. BALLIEU.

Sur la correction de largeur des fentes dans les mesures au spectrophotomètre

PAR

M. A. BIOT

1. — LE PROBLÈME.

Quand, dans un spectrophotomètre quelconque, visuel, thermo-électrique ou photoélectrique, on utilise comme source d'éclairage non pas une source qui donne un spectre de raies, mais une source à spectre continu, il convient de corriger les résultats des mesures d'un effet dû à la largeur des deux fentes de l'instrument. Cela provient de ce que, dans ce cas, le récepteur reçoit des radiations différemment absorbées ou réfléchies par le milieu étudié, de la variation de sensibilité de ce récepteur avec la longueur d'onde, de la sélectivité de l'absorption du filtre que l'on interpose éventuellement sur le trajet des rayons lumineux pour absorber les radiations parasites, de la sélectivité de l'émission de la source dans le domaine spectral élémentaire utilisé. Cette correction peut dépasser notablement les

erreurs des mesures et il convient d'en tenir compte dans tous les cas où l'on recherche une précision élevée. D'assez nombreuses études ont été consacrées à la question ⁽¹⁾. Reprenant le problème par la méthode utilisée par G. Ribaud et P. Peychès nous voudrions préciser et compléter quelques-uns des résultats obtenus par ces auteurs et insister aussi sur la méthode graphique qu'ils ne considèrent pas.

2. — RAPPEL DES NOTATIONS ET RÉSULTATS DE G. RIBAUD ET L. PEYCHÈS.

a. Soient : a et b , respectivement, la largeur des fentes d'entrée et de sortie de l'instrument évaluées en angströms ; λ_0 la longueur d'onde de la radiation qui correspond au milieu de la fente d'entrée et pour laquelle il faut déterminer la correction ; λ une longueur d'onde quelconque ; x la différence $\lambda - \lambda_0$. On peut négliger ici la variation de la dispersion du prisme dans le domaine utilisé autour de λ_0 .

Soit encore $\varphi_0 dx$ le flux élémentaire effectivement reçu par le récepteur dans l'intervalle élémentaire dx près de λ_0 . Le flux que reçoit le récepteur dans cet intervalle dx a pour valeur ⁽²⁾.

$$\begin{aligned} \varphi_x dx &= \varphi_0 dx && \text{dans l'intervalle } -\frac{b-a}{2} \text{ à } +\frac{b-a}{2} \\ \varphi_0 \left(\frac{b+a}{2a} + \frac{x}{a} \right) dx &&& \text{dans l'intervalle } -\frac{b+a}{2} \text{ à } -\frac{b-a}{2} \quad (1) \\ \varphi_0 \left(\frac{b+a}{2a} - \frac{x}{a} \right) dx &&& \text{dans l'intervalle } +\frac{b-a}{2} \text{ à } +\frac{b+a}{2} \end{aligned}$$

dans le cas où $b > a$

$$\varphi_x dx = \varphi_0 \left(1 \pm \frac{x}{a} \right)$$

dans le cas où $b = a$

⁽¹⁾ On en trouvera la bibliographie dans :

J. WALSH, *Photometry*, 1926, p. 291, nos 59 et 60.

W. MEYER-EPPLER. Beiträge zum Problem der « Reduktion auf unendlich schmalen Spalt ». *Z. Inst.*, 60 (1940), 197-209.

G. RIBAUD et L. PEYCHÈS. Corrections dues aux largeurs des fentes dans les mesures photométriques et pyrométriques effectuées au spectrophotomètre. *Rev. d'Opt.*, 11 (1932), 241-256.

W. E. FORSYTHE, edit. *Measurement of radiant energy*, pp. 182 et 349.

⁽²⁾ Pour la démonstration de ces relations on se basera sur le n° 127 de G. RIBAUD. *Traité de pyrométrie optique*. Ed. *Rev. d'Optique*. Paris, 1932. p. 174. Dans le travail cité plus haut et publié par la *Rev. d'Optique*, G. RIBAUD et L. PEYCHÈS considèrent seulement le cas où $a = b$.

$$\varphi_x dx = \begin{cases} \varphi_o dx \\ \varphi_o \left(\frac{b+a}{2b} + \frac{x}{a} \right) dx \\ \varphi_o \left(\frac{b+a}{2b} - \frac{x}{a} \right) dx \end{cases}$$

dans le cas où $b > a$.

On peut donc prendre les premières expressions en admettant que b est la largeur de la fente la plus large, a celle de la fente la plus étroite.

b. Soient maintenant τ_o le facteur de transmission (ou de réflexion) à calculer, τ_x le même facteur pour la longueur d'onde $\lambda_o + x$, τ le facteur mesuré, $\varphi_x \Phi_x dx$ le flux *décelé* par le récepteur dans l'intervalle dx autour du point x , quand le corps étudié n'est pas interposé sur le trajet des rayons lumineux. Le produit $\varphi_x \Phi_x \tau_x dx$ représente le flux décelé par le récepteur quand le corps étudié est interposé. En raison de la définition de τ , on peut écrire, à l'égalisation photométrique

$$\tau \int_{x_1}^{x_2} \varphi_x \Phi_x dx = \int_{x_1}^{x_2} \varphi_x \Phi_x \tau_x dx \quad (2)$$

x_1 et x_2 ayant comme valeurs respectives $-\frac{b+a}{2}$ et $+\frac{b+a}{2}$

c. Évaluons Φ_x et τ_x . La première de ces quantités intervient dans les deux membres de l'égalité ci-dessus. Nous pouvons nous contenter de l'exprimer à un facteur indépendant de x près.

Admettons que seuls les trois premiers termes du développement de Φ_x et de τ_x suivant les puissances de x soient appréciables.

Nous écrirons donc

$$\begin{aligned} \Phi_x &= \Phi_o (1 + \alpha x + \beta x^2) \\ \tau_x &= \tau_o (1 + p x + q x^2) \end{aligned} \quad (3)$$

Les valeurs de p et de q devraient se prendre sur la courbe corrigée de transmission (ou de réflexion). On les prendra sur la courbe expérimentale.

Il reste à déterminer α et β . Soient : B_x la brillance spectrale de la source utilisée évaluée après traversée du spectrophotomètre; V_x la fonction de visibilité relative; E_x la transmission du filtre éventuellement interposé pour absorber les fausses lumières (radiations parasites). On écrira aussi

$$\begin{aligned} B_x &= B_o (1 + b_1 x + b_2 x^2) \\ V_x &= V_o (1 + v_1 x + v_2 x^2) \\ E_x &= E_o (1 + e_1 x + e_2 x^2) \end{aligned}$$

de sorte que l'on aura

$$\Phi^x = B_x V_x E_x = \varphi_x B_o E_o V_o (1 + \alpha x + \beta x^2) \quad (4)$$

avec

$$\alpha = b_1 + v_1 + e_1$$

$$\beta = b_2 + v_2 + e_2 + b_1 v_1 + b_1 v_1 + b_2 e_2$$

les quantités b , v et e étant supposées connues.

3. — LA FORMULE GÉNÉRALE.

La formule (2) donne

$$\tau = \frac{\int_{-\frac{b+a}{2}}^{-\frac{b-a}{2}} \Phi_x \varphi_x \tau_x dx + \int_{-\frac{b-a}{2}}^{+\frac{b-a}{2}} \Phi_x \varphi_o \tau_x dx + \int_{+\frac{b-a}{2}}^{+\frac{b+a}{2}} \Phi_x \varphi_x \tau_x dx}{\int_{-\frac{b+a}{2}}^{-\frac{b-a}{2}} \Phi_x \varphi_x dx + \int_{-\frac{b-a}{2}}^{+\frac{b-a}{2}} \Phi_x \varphi_o dx + \int_{+\frac{b-a}{2}}^{+\frac{b+a}{2}} \Phi_x \varphi_x dx}$$

Introduisons dans cette expression les valeurs de Φ_x , φ_x et τ_x données par les relations (1) (3) et (4) et intégrons. On trouve, tous calculs faits

$$\tau_o - \tau = - \frac{(q + \alpha p) \frac{a^2 + b^2}{12} + \beta q \frac{3(a^2 + b^2)^2 + 4a^2 b^2}{15 \times 16}}{1 + \beta \frac{a^2 + b^2}{12}} \times \tau_o \quad (5)$$

ce qui devient, dans le cas où $a = b$

$$\tau_o - \tau = - \frac{(q + \alpha p) \frac{a^2}{6} + \beta q \frac{a^4}{15}}{1 + \beta \frac{a^2}{6}} \times \tau_o \quad (6)$$

relation donnée par G. Ribaux et L. Peychès.

Les valeurs (5) et (6) sont les quantités à ajouter à τ mesuré pour obtenir τ_o inconnu, dans chacun des cas considérés. Elles sont négligeables si α , β , p et q restent faibles et en particulier si la courbe de transmission (ou de réflexion) de l'échantillon est sensiblement une droite horizontale.

4. — CAS OÙ a ET b SONT DIFFÉRENTS.

On s'astreint généralement à faire $a = b$. La formule (5) symétrique en a et b montre que les largeurs des deux fentes interviennent de la

même manière dans le calcul de la correction. Tous les spectrophotomètres de précision devraient donc être munis, à la fente de sortie, tout aussi bien qu'à la fente d'entrée, d'un dispositif gradué donnant la largeur de cette fente. Il n'en est malheureusement pas toujours ainsi. Dans le cas où ce dispositif n'existe pas on emploiera avec avantage un dynamètre pour mesurer la largeur de la fente de sortie.

5. — CALCUL DE v_2 . (OBSERVATIONS VISUELLES).

v_2 devrait se calculer d'après la courbe de visibilité de l'observateur. Comme elle est inconnue en général, il faut effectuer le calcul d'après la courbe de visibilité internationale dont les coordonnées ont été fixées par la Commission Internationale de l'Eclairage (C.I.E.) en 1931 (1).

Nous servant de ces nombres nous avons fait le calcul comme suit.

La relation $V_x = V_0 + V_0 v_1 x + V_0 v_2 x^2$ montre que si y est l'ordonnée de la courbe de visibilité, on a au point (λ_0, y_0) , $y_0'' = V_0 v_2$. Confondant alors la courbure en ce point avec y_0'' on peut écrire :

$$V_0 v_2 = \frac{1}{R_0}, \text{ si } R_0 \text{ est le rayon de courbure en } \lambda_0, y_0.$$

Pour calculer R_0 nous avons cherché le rayon de la circonférence qui passe par les trois points de la courbe de visibilité définis par les abscisses $\lambda_0 = 50\text{\AA}$, λ_0 et $\lambda_0 + 50\text{\AA}$. Nous avons de la sorte pu établir le tableau ci-dessous

λ en \AA	4000	4100	4200	4300	4400	4500	4600	4700
$v_2 \times 10^6$	0	133	150	31	10	19	13	20
	4800	4100	5000	5100	5200	5300	5400	5500
	11	23	24	+ 7.6	— 10	— 2.0	— 5.3	— 3.9
	5600	5700	5800	5900	6000	6100	6200	6300
	— 4.5	— 4.2	— 3.8	— 1.5	+ 0.2	1.6	0.2	12.0
	6400	6500	6600	6700	6800	6900	7000	
	12	22	28	47	26	59	39	

La précision doit être faible. Il est douteux qu'elle atteigne 1/10 en valeur relative. Cela provient à la fois du mode de calcul — qui s'impose — et de la manière dont est définie la courbe de visibilité relative.

(1) Voir p. ex. : G. RIBAUD. Les résolutions de la Commission Internationale de l'Eclairage relatives à la colorimétrie. *Rev. d'Opt.*, 15 (1936), 161-181.

Les ordonnées de la courbe en fonction de λ sont les coefficients y du tableau II, p. 175.

Si l'on considère qu'il convient d'ajouter à cette erreur celle qui provient de l'assimilation de la courbe de visibilité relative de l'observateur réel à la courbe internationale, on voit que l'erreur totale à craindre dans la détermination de v_2 est élevée. Elle n'est certainement pas moindre que 1/5 en valeur relative.

6. — CALCUL DE β (OBSERVATIONS VISUELLES).

On sait que l'on a

$$\beta = b_2 + v_2 + b_1 v_1 + (e_2 + b_1 e_1 + e_1 v_1)$$

les termes entre parenthèses dépendant de la transmission du filtre utilisé pour la suppression des radiations parasites. Ces termes sont négligeables s'il n'y a pas de filtre ou si la courbe de transmission de ce filtre est assimilable à un segment de droite horizontale au point considéré.

Nous supposons dans tout ce qui va suivre qu'il en est ainsi.

Nous supposons de plus que la source utilisée est assimilable à un corps gris au point considéré. Il est possible, si cette condition est réalisée, de calculer b_1 et b_2 . G. Ribaud et L. Peychès ont, dans leur article cité, donné les valeurs de ces quantités pour un certain nombre de valeurs de la température de couleur de la source, ainsi que les valeurs de v_1 , celles-ci calculées également d'après la courbe de visibilité internationale et par conséquent sensibles à la remarque que nous avons faite au n° précédent au sujet de la précision de v_2 . En combinant les résultats obtenus par ces auteurs et les nôtres, on peut établir le tableau suivant des valeurs de β .

λ	4000	4100	4200	4300	4400	4500	4600	4700
β { 2000°K	34	164	177	53	30	35	47	32
$\times 10^6$ { 3000°K	20	140	165	43	20	27	20	26
	4800	4900	5000	5100	5200	5300	5400	5500
	21	32	30	+13	— 6	+ 1	— 5	— 3
	16	27	27	10	— 8	— 1	— 5	— 4
	5600	5700	5800	5900	6000	6100	6200	6300
	— 4	— 5	— 5	0	— 1	0	— 2	+ 9
	— 4	4	— 4	— 2	— 1	0	— 1	+11
	6400	6500	6600	6700	6800	6900	7000	
	+ 9	18	24	42	21	54	33	
	+10	2	26	45	24	57	37	

Comme la partie principale de ces nombres est en général constituée par v_2 , ils ne sont en principe exacts qu'à $1/10$ ou même à $1/5$ près en valeur relative.

Nous complétons ci-dessous nos résultats par des valeurs extraites des tableaux de G. Ribaud et L. Pzechès.

λ							
v_1	4000	4250	4500	4750	5000	5250	5500
$\times 10^4$	100	85	65	45	32	20	0
b_1	2000° K	30	21		16		12
	3000° K	17	12		9		7
b_2	2000° K	4.2	2.2		1.3		0.7
	3000° K	2.6	0.4		0.12		+0.03
	5750	6000	6250	6500	6750	7000	
	— 9	—20	—33	—45	—65	—71	
		10		9		8	
		5		4		2.5	
		0.4		0.2		0.1	
		— 0.04		— 0.05		— 0.006	

7. — ÉVALUATION DU TERME $\beta \frac{a^2}{6}$ DE LA FORMULE (6).

Prenons $a = 50\text{\AA}$, valeur normale, au moins pour les observations faites dans la région centrale du spectre (observations visuelles) et supposons que la température de couleur de la source soit 3000° K.

On a $a^2 = 25 \times 10^2$ et l'on trouve ainsi pour $\beta \frac{a^2}{6}$ les valeurs suivantes

λ							
$10^{-2} \times \beta \frac{a^2}{6}$	4000	4100	4200	4300	4400	4500	4600
	0.8	5.8	6.8	1.8	0.8	1.1	0.8
							1.1
	4800	4900	5000	5100	5200	5300	5400
	0.6	1.1	1.1	0.4	—0.3	—0	—0.2
							—0.2
	5600	5700	5800	5900	6000	6100	6200
	—0.2	—0.2	—0.2	—0.1	0	0	0
							0.4
	6400	6500	6600	6700	6800	6900	7000
	0.4	0.8	1.1	1.9	1.1	2.4	1.5

Pour $a = 100\text{\AA}$, ces valeurs devraient être multipliées par 4; elles devraient être divisées par 4 pour $a = 25\text{\AA}$.

Si l'on tient compte de ce fait que les observations sont en pratique presque toujours impossibles pour les longueurs d'onde plus petites que 4150\AA en raison à la fois du peu de sensibilité de l'œil pour ces radiations et de la faiblesse de l'émission des sources pratiquement utilisables dans cette région, on voit que l'on pourra en général négliger le terme $\beta \frac{a^4}{6}$, et que dans le cas où l'on emploie une fente

large on pourra toujours utiliser la formule (6) sous la forme :

$$\tau_o - \tau = \tau_o \left[(q + \alpha p) \frac{a^2}{6} + \beta q \frac{a^4}{15} \right] \left(1 - \beta \frac{a^2}{6} \right) \quad (6')$$

le second facteur de second membre pouvant même être souvent négligé dans ce cas.

8. — EVALUATION DU TERME $\beta q \frac{a^4}{15}$ (OBSERVATIONS VISUELLES).

Nous supposons que la valeur absolue maximum que q peut atteindre est de l'ordre de 10^{-4} . Cette valeur correspond aux pointes aigües de la courbe de transmission (ou de réflexion).

On trouve dans ces conditions, pour $a = 100\text{\AA}$, $a = 50\text{\AA}$ et pour une source dont la température de couleur vaut 3.000°K ,

λ	4000	4100	4200	4300	4400	4500	4600	4700
$\beta q \frac{a^4}{15} \times 10^{-2} \left\{ \begin{array}{l} 100\text{\AA} \\ 50\text{\AA} \end{array} \right.$	1.3	9	11	2.9	1.3	1.8	1.3	1.7
	0.1	0.6	0.7	0.2	0.1	0.1	0.1	0.1
	4800	4900	5000	5100	5200	5300	5400	5500
	1.1	1.8	1.8	0.7	-0.5	0	-0.3	-0.3
	0.1	0.1	0.1	0	0	0	0	0
	5600	5700	5800	5900	6000	6100	6200	6300
	-0.3	-0.3	-0.3	-0.1	0	0	0	+0.7
	0	0	0	0	0	0	0	0
	6400	6500	6600	6700	6800	6900	7000	
	0.7	1.3	1.7	3.0	1.6	3.8	2.5	
	0	0.1	0.1	0.2	0.1	0.2	0.2	

Il résulte de ces nombres que le terme $\beta q \frac{a^4}{15}$ est toujours négligeable

pour des valeurs de a voisines de 50 Å ou plus petites. Par ailleurs, comme la valeur adoptée pour q correspond par hypothèse à une pointe de la courbe de transmission (ou de réflexion), on a en ce point $p = 0$. Le terme principal de la correction (relative) que l'on calcule se réduit à $q \frac{a^2}{6}$, qui est égal, pour $a = 100$ Å, à 17×10^{-2} .

Le terme $\beta q \frac{a^4}{15}$ peut donc avoir, dans ces circonstances, la valeur limite dont il faut encore tenir compte dans le calcul de la correction (soit 1/10 de la valeur de cette correction). En définitive, ce terme sera presque toujours négligeable et l'on pourra en tous cas écrire la formule 6' sous la forme

$$\tau_0 - \tau = \tau_0 (q + \alpha p) \frac{a^2}{6} + \beta a^4 \left(\frac{q}{15} - \frac{q + \alpha p}{36} \right) \quad (6'')$$

le second terme du second membre étant souvent négligeable sauf parfois, dans le cas des fentes très larges, de l'ordre de 100 Å.

9. — ETUDE DU TERME PRINCIPAL $(q + \alpha p) \frac{a^2}{6}$. q , courbure de la courbe de transmission (ou de réflexion) est positif quand la concavité de cette courbe est tournée vers les τ positifs, négatif dans le cas contraire; p est positif sur les branches montantes de cette courbe, négatif sur les branches descendantes; $\alpha = b_1 + v_1$ est positif pour toutes les longueurs d'onde plus petites que 5800 Å et négatif au-delà pour une source dont la température de couleur vaut 2000 K°; la longueur d'onde de changement de signe descend à 5680 Å si la température de couleur de la source vaut 3000 °K.

Pour avoir une idée de l'ordre de grandeur que peut atteindre le terme principal, supposons q , α , p , tous trois positifs, $q = 0.5 \times 10^{-4}$, $\alpha = 100 \times 10^{-4}$, $p = 200 \times 10^{-4}$, $a = 50$ Å. On trouve dans ces conditions limites, pour le terme en question, la valeur 10.5×10^{-2} , c'est-à-dire environ 10 %. La correction a le signe opposé et serait donc négative dans le cas considéré.

La précision avec laquelle q et p sont déterminés étant au plus de 10 % il en résulte que la correction calculée n'est elle-même pas connue avec une précision plus grande.

10. — MÉTHODE GRAPHIQUE. La relation (6'') peut s'écrire

$$\tau = A + Ba^2 + Ca^4;$$

si l'on pose $a^2 = x$, on peut l'écrire

$$\tau = A + Bx + Cx^2$$

τ est donc représentable, dans le plan (x, τ) , par une parabole. Si l'on détermine expérimentalement sa valeur pour trois valeurs de x , on pourra tracer la portion de parabole correspondante et en prolongeant cette parabole jusqu'à l'axe des τ on trouvera la valeur qui correspond à $x = 0$ (ou $a = 0$). Il sera souvent possible de supposer que le coefficient C est nul. La courbe d'interpolation se réduit, dans ce cas, à une ligne droite.

Il semble bien, par ce qui précède, que la précision obtenue par la méthode graphique doive être comparable à celle que l'on obtient par le calcul.

11. — COMPARAISON DE LA BRILLANCE SPECTRALE DE DEUX SOURCES.

Nous reprendrons ici rapidement ce problème afin d'être complet, en suivant également la méthode de G. Ribaud et L. Psychès.

Soient B_o , B'_o les brillances respectives de la source de comparaison et de la source étudiée pour la longueur d'onde λ_o . On détermine, au spectrophotomètre, le rapport de ces brillances. On trouve une valeur N qui dépend de la largeur des fentes de l'instrument.

Par des calculs analogues à ceux que nous avons indiqués plus haut on trouve

$$N_o - N = - N_o (\beta' - \beta) \frac{a^2}{6}$$

avec les notations précédentes.

Si les sources sont toutes deux assimilables à des corps gris dont les températures de couleur sont comprises entre 2000°K et 3000°K et s'il n'existe pas de filtre pour la suppression des radiations parasites, ou si ce filtre possède au voisinage de λ_o une courbe de transmission sensiblement horizontale, la correction est négligeable.

Elle ne peut d'ailleurs devenir appréciable, éventuellement, que par l'effet du filtre interposé.

SUR L'ABSORPTION DU BAUME DU CANADA DANS LE SPECTRE VISIBLE

par M. A. BIOT

1. — Le baume du Canada est utilisé pour coller les pièces d'optique. Pour l'employer on dissout dans du xylol, à une douce température, les petits blocs de matière brute livrés par le commerce.

Au refroidissement le mélange durcit. Il redevient sirupeux quand on le réchauffe et l'on peut alors s'en servir.

Préparé, il est toujours un peu jaune, et les réchauffements successifs augmentent la coloration.

L'examen au spectroscope d'une couche de baume du Canada de quelques centimètres d'épaisseur décèle une absorption générale dans tout le spectre en même temps qu'une absorption intense des radiations violettes.

2. — Il est important dans bien des cas de connaître l'ordre de grandeur de cette absorption sélective. Nous avons préparé dans ce but une lame de baume d'épaisseur constante (1 mm), comprise entre deux lames de verre à faces planes et parallèles, et nous avons mesuré pour différentes longueurs d'onde, au moyen du spectrophotomètre de König-Martens, l'absorption de cet échantillon. Nous donnons, dans le tableau ci-dessous les résultats de nos mesures. Ce tableau renferme, à côté de chaque longueur d'onde, la valeur de la densité optique correspondante de la lame étudiée. On sait que la densité optique D est la quantité $-\lg_{10} \frac{I}{I_0}$, I_0 étant l'intensité du faisceau incident, I celle du faisceau transmis. L'emploi de la densité optique présente sur celui du facteur de transmission $T = \frac{I}{I_0}$ cet avantage qu'elle est proportionnelle à l'épaisseur et que les densités dues à des pertes d'intensité provoquées par des causes diverses s'ajoutent simplement. Voici les résultats en question.

λ (en $m\mu$)	D	λ	D
600	0.029	450	0.043
550	0.029	435.8 (Hg)	0.054
510	0.030	430	0.061
490	0.031	420	0.077
470	0.036	(400)	(0.132)

Ces nombres se rapportent à la seule absorption par la couche de baume. Nous les avons déterminés en retranchant des résultats des mesures la valeur constante 0,038 adoptée comme représentant, dans tout le spectre visible, la densité introduite par les réflexions sur les faces extérieures (transitions verre-air) de la lame complexe étudiée. La valeur adoptée pour $\lambda = 400m\mu$ n'a pas été mesurée mais déterminée par extrapolation graphique.

En raison de ce que nous avons dit plus haut, nos résultats ne sont valables, évidemment, que pour l'échantillon qui nous a servi. On peut cependant admettre qu'ils représentent :

l'allure de l'absorption dans tous les cas (relèvement de la courbe des densités à partir de $\lambda = 490 \text{ m}\mu$ environ);

des valeurs que l'on peut adopter pour l'évaluation de l'effet produit par l'introduction d'une couche de baume de Canada d'épaisseur donnée dans un dispositif optique.

3. — Appliquons nos résultats à quelques cas particuliers, en notant qu'à une différence de densité de 0.0043 correspond, quelle que soit la valeur absolue de la densité, une différence de 1 % dans l'intensité relative du faisceau transmis.

a. Quand on colle deux pièces optiques ordinaires, l'épaisseur de baume est de l'ordre de 0.01 à 0.02 mm. La différence de densité introduite par une telle couche entre les extrémités du spectre visible est de l'ordre de 0.002, ce qui est en général négligeable. Il pourrait ne plus en être de même si, au lieu d'une seule surface de collage il en existait plusieurs. Dans le cas de n surfaces, cette différence de densité serait de l'ordre de $n \times 0.002$.

b. Certains dispositifs d'égälisation des champs photométriques comportent un coin de gélatine qui en principe doit être « neutre », c'est-à-dire présenter — en tous ses points — une absorption indépendante de la longueur d'onde. Ces coins sont réalisés sous une forme rectiligne ou circulaire. La différence maximum entre les épaisseurs de la gélatine, aux deux extrémités du coin est de l'ordre de 0.1 mm. Or, il est désirable de protéger la gélatine. Une couche de baume de 0.1 mm d'épaisseur n'est pratiquement pas neutre. On ne peut donc protéger la gélatine en collant dessus une lame de verre de manière à réaliser un ensemble neutre à faces parallèles, d'autant plus que les couches de gélatine utilisées ne sont pas strictement neutres elles-mêmes, mais présentent souvent, également, une absorption sélective dans la région violette du spectre.

c. Il est utile de remarquer ici que les pertes par réflexion normale sur les surfaces d'une pièce optique dépendent de l'indice et sont plus grandes dans le violet que dans le rouge. Pour un indice moyen de l'ordre de 1.52 et une différence d'indices entre deux radiations de 0,01, la différence de densité introduite ainsi par les réflexions est d'environ 0,0013. Cette quantité est négligeable. Mais si plusieurs pièces optiques sont placées l'une à la suite de l'autre sur le trajet des rayons lumineux, l'effet global peut devenir sensible. L'interposition de quatre pièces introduit en effet déjà une différence de densité de l'ordre de 0.005, qui peut être appréciable dans bien des cas.

Spectres d'absorption infra-rouges des alcools méthyliques

CH_3OH CH_3OD CD_3OH et CD_3OD ,

liquides et vapeurs

(3 à 15 μ)

PAR

CH. COURTOY

Résumé. — On donne dans ce travail les spectres obtenus avec un spectromètre à prisme de NaCl. L'interprétation des bandes fondamentales est discutée. Des résultats nouveaux sont apportés spécialement pour le mode fondamental de déformation O-H dans le plan COH. De même la comparaison entre les spectres des liquides et ceux des vapeurs met en évidence une nouvelle bande attribuable au groupe hydroxyle en liaison moléculaire. Elle est située vers 1650 pour OH et 1215 pour OD.

INTRODUCTION.

L'alcool méthylique a été étudié dès les débuts de la spectroscopie infra-rouge. L'interprétation de son spectre continue cependant à présenter de sérieuses difficultés. Pour essayer de les résoudre nous avons entrepris l'étude des spectres des molécules deutérées en corrélation avec l'étude des spectres Raman de CH_3OH et CD_3OD exécutée par de Hemptinne et Doehaerd ⁽¹⁾ et en continuité avec les halogénures de méthyle dont quelques résultats ont été publiés ⁽³⁾. Nous avons eu, dans la suite, connaissance des travaux de Noether sur CD_3OH et CD_3OD vapeurs ⁽²⁾, mais nous pouvons apporter des résultats plus complets. Les conditions expérimentales sont les mêmes que celles décrites antérieurement ⁽³⁾.

⁽¹⁾ M. DE HEMPTINNE et TH. DOEHAERD, *Ac. Roy. Belg. Cl. Sc.*, XXX, 189, 1944.

⁽²⁾ H. D. NOETHER, *J. Chem. Phys.*, 10, 693, 1942.

⁽³⁾ CH. COURTOY, *Ann. Soc. Sc. Brux.*, ser. I, 60, 122, 1946.

TRAVAUX ANTÉRIEURS.

Les travaux les plus anciens avaient tous pour objet l'alcool méthylique liquide tandis que les plus récents se sont limités aux vapeurs. Nous signalerons les suivants : Plyler et Burdine ⁽¹⁾ pour CH_3OH liquide (2 à 8 μ). Borden et Barker ⁽²⁾ et Barker et Bosschieter ⁽³⁾ pour la structure fine des bandes principales de CH_3OH vapeur d'une part, et de CH_3OD et CH_2DOD vapeurs d'autre part. Enfin Noether, dans le travail signalé, indique l'absorption des vapeurs de CD_3OH et CD_3OD . L'appareil utilisé est analogue au nôtre, mais les produits ont été obtenus en très petite quantité, et des impuretés rendent l'interprétation plus difficile.

On trouvera la bibliographie des spectres Raman dans l'article de de Hemptinne et Doehaerd. Ces derniers ont basé leur interprétation des vibrations du groupe CH_3O CD_3O sur un calcul de la fonction potentielle qui néglige le dernier atome d'hydrogène. Les résultats sont très satisfaisants. Par après, Fonteyne ⁽⁴⁾ a publié une note sur les spectres Raman de CH_3OH et CH_3OD . L'interprétation diffère sur plusieurs points, mais dans l'ensemble nous préférons celle de de Hemptinne et Doehaerd. Plus récemment encore Stepanow ⁽⁵⁾ a publié une étude, avec interprétation, des spectres Raman de CH_3OH CH_3OD CD_3OH et CD_3OD . Nous n'avons pas encore pu en prendre connaissance.

RÉSULTATS ET INTERPRÉTATION DES SPECTRES.

Les figures 1 et 2 donnent les courbes, d'une part pour les liquides et d'autre part pour les vapeurs. Le tableau I indique la position (en cm^{-1}) des maxima d'absorption. On remarque de suite des différences assez notables entre les liquides et les vapeurs p. ex. dans la région de 1300 cm^{-1} pour CH_3OH . Nous allons examiner certains modes de vibration avec quelques détails.

VIBRATIONS DU RADICAL HYDROXYLE (VAPEURS)

Ce groupe comprend trois modes de vibration.

Une vibration de valence OH OD de fréquence trop élevée pour

⁽¹⁾ E. K. PLYLER et TH. BURDINE, *Phys. Rev.*, 35, 600, 1930.

⁽²⁾ A. BORDEN et E. F. BARKER, *J. Chem. Phys.*, 6, 553, 1938.

⁽³⁾ E. F. BARKER et G. BOSSCHIETER, *J. Chem. Phys.*, 6, 563, 1938.

⁽⁴⁾ R. FONTEYNE, *Acta Chemica*, 1, 65, 1944.

⁽⁵⁾ B. I. STEPANOW, *J. Phys. Chem. U R S S* 19, 497, 1945.

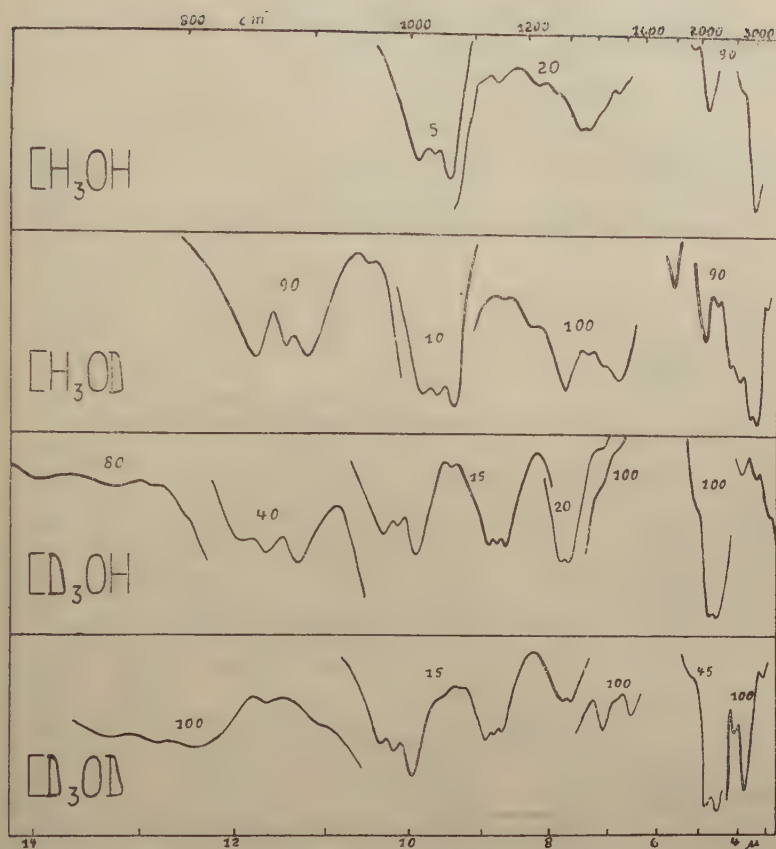


FIG. 1. — Spectres d'absorption des vapeurs d'alcool

apparaître avec précision sur la partie du spectre reproduite ici. Dans une note précédente (1) nous avons étudié l'anharmonicité de ce mode de vibration. Les deux autres modes sont des vibrations de déformation. Le mode de torsion perpendiculaire au plan COH a été trouvé à 270 cm^{-1} et a donc une fréquence trop basse. Par contre le mode de déformation dans le plan COH se trouve dans le domaine de fréquences étudié dans ce travail. La variation de moment électrique aura sa composante principale parallèle à l'axe de la molécule. La bande infra-rouge sera donc du type parallèle. Pour CH_3OD et CD_3OD , l'interprétation proposée par Barker et par Noether nous paraît s'imposer. Nous trouvons les trois branches des bandes paral-

(1) CH. COURTOY, *Ann. Soc. Sc. Brux.*, sér. I, 61, 66, 1947.

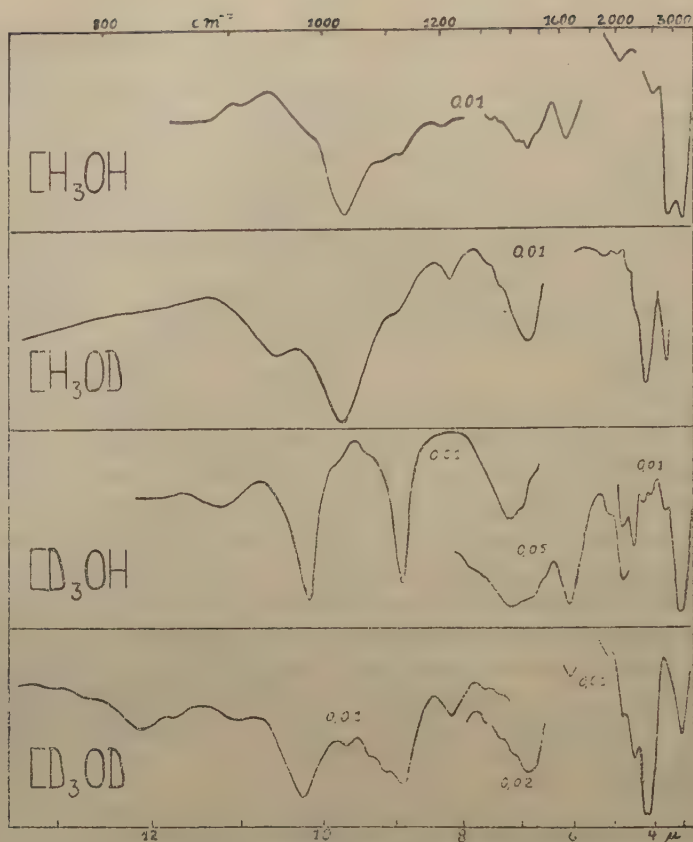


FIG. 2. — Spectres d'absorption des alcools liquides

lèles avec les branches centrales respectivement à 871 et 776 en bon accord avec les valeurs indiquées par ces auteurs.

C'est pour les bandes O-H que l'attribution devient difficile. Noether propose 1340 et 1289. Cette interprétation ne nous paraît guère possible. Évidemment la bande à 1289 de CD_3OH telle que Noether a pu l'obtenir au moyen d'un prisme de CaF_2 ressemble fort aux bandes de CH_3OD et CD_3OD , mais par contre la bande à 1340 cm^{-1} de CH_3OH n'a certainement pas l'allure d'une bande parallèle, et la structure fine obtenue par Borden et Barker montre même très nettement une bande perpendiculaire qu'ils attribuent à ν_{5-6} . De plus l'écart isotopique est trop élevé $1340/869 = \sqrt{2,36}$ et $1289/776 = \sqrt{2,75}$.

Borden et Barker considéraient que la bande de déformation O-H

TABLEAU I. — POSITION DES MAXIMA D'ABSORPTION (en cm^{-1})

VAPEURS				LIQUIDES			
CH_3OH	CH_3OD	CD_3OH	CD_3OD	CH_3OH	CH_3OD	CD_3OH	CD_3OD
		716					658
		751	754				669
		776	776				680
			808				690
	848	839			855	886	826
	871	858	856				852
	892	883	899				911
							975
	951	965	965	964	941	978	
		983	984				1024
1010	1013	1006	1004	1027	1025	1022	1063
1032	1037		1048			1057	1083
1057	1063	1057	1073	1087	1099		
1104		1115	1116	1110		1119	1117
1131		1135	1135				
	1156	1149	1149				
1209	1206			1198			
1266					1218	1250	1214
	1295	1282	1290		1311		1316
1323		1304	1302	1323			
1346	1359			1340	1355	1383	1340
1410	1418	1399	1406	1406	1393		1387
1437		1445		1426		1425	1429
1468	1468		1471	1449	1456		1451
1502			1527	1495		1497	1485
	1779			1639		1639	1645
1930		1961	1923		1923	1934	1923
2075	2058	2092	2083	2028	2028	2049	2049
	2212	2188	2212		2141		2188
	2353			2482	2198	2198	2353
2604	2500		2482		2404	2353	2421
		2591	2667			2445	
2941	2747	2941		2874	2841	2747	
	2967			3247		3195	3195
	3401	3336	3236				
	3663	3663					

était peut-être cachée par la bande de vibration de valence C-O beaucoup plus intense. Comme elle n'apparaît nulle part dans le spectre, nous ne voyons pas d'autre solution possible, et nous admettons alors la bande à 858 de CD_3OH comme bande correspondante. Si on admet le même rapport de décalage entre CH_3OH et CH_3OD qu'entre CD_3OH et CD_3OD , la bande de CH_3OH doit se trouver vers $\frac{869.858}{776} = 961$. Le fait que Borden et Barker n'observent pas la

branche Q de cette bande ne nous semble pas une objection importante, car cette branche, telle qu'elle apparaît dans le spectre de CH_3OD n'est pas tellement bien marquée. De plus l'ensemble de la bande doit être très faible dans leur spectre, car ils sont obligés de travailler à des pressions assez réduites pour ne pas avoir une absorption totale due à la bande à 1034.

Il est évidemment un peu étrange à première vue que le décalage isotopique de fréquence soit plus grand entre CD_3OD et CH_3OD qu'entre CD_3OD et CD_3OH , alors que c'est le radical hydroxyle qui semble avoir le rôle important. Nous croyons cependant devoir maintenir notre interprétation. Cela signifie que le radical méthyle et spécialement les atomes d'hydrogène ont un rôle important à jouer dans ce mode de vibration. Il n'y a d'ailleurs rien d'étonnant à cela si on tient compte de la structure spatiale de la molécule. Il nous paraît assez normal d'admettre que le déplacement de l'hydrogène de OH dans le plan COH est accompagné de déplacements correspondant des deux atomes d'hydrogène les plus proches. Cette interprétation est encore confirmée par les spectres des liquides, où ces bandes apparaissent de nouveau mais ayant toutes subi un décalage de même genre vers les grandes fréquences. On trouve en plus une bande à l'endroit prévu dans le spectre de CH_3OH . Il reste à expliquer les bandes à 1340 de CH_3OH et vers 1300 pour CD_3OH où le radical OH doit intervenir car elles disparaissent de cette partie du spectre dans les liquides.

GROUPE HYDROXYLE DES LIQUIDES (ASSOCIATION MOLÉCULAIRE).

La vibration de valence OD des vapeurs disparaît du spectre des liquides et est remplacée par une bande assez large et très intense qui se situe vers 2410 cm^{-1} .

Les spectres des liquides montrent encore nettement une absorption OH à 1639 pour CH_3OH et CD_3OH à laquelle correspond une bande d'absorption OD à 1218 et 1214 pour CH_3OD et CD_3OD . Ces deux fréquences sont à peu près la moitié de 3300 et 2410 qui sont considérées comme les fondamentales. Ces nouvelles bandes pour-

raient donc être les fondamentales dont les autres ne seraient que la première harmonique. Le fait que la fondamentale serait plus faible que l'harmonique n'est pas une objection dirimante. Il faut attendre une étude théorique, d'ailleurs fort compliquée, de ce complexe moléculaire pour savoir s'il s'agit d'un seul mode de vibration ou de deux modes indépendants dont l'un a une fréquence à peu près double de l'autre comme ω_1 et $\omega_{8,9}$.

Comme nous l'avons dit plus haut on retrouve, légèrement déplacées vers les grandes fréquences, les bandes du mode de déformation hydroxyle.

Le tableau II reprend l'ensemble des résultats pour le radical hydroxyle.

TABLEAU II. — VIBRATIONS DU GROUPE HYDROXYLE

	CH ₃ OH	CH ₃ OD	CD ₃ OH	CD ₃ OD
VAPEURS déformation	C-O	871	858	776
LIQUIDES	965	941	886	825
	1639	1218	1639	1214
	—	2405	—	2420

RADICAL CH₃O CD₃O.

L'interprétation des bandes correspondant aux modes ω_1 , $\omega_{2,3}$ et ω_4 pour les vibrations de valence CH symétriques et antisymétriques et pour la vibration de valence CO ne présente aucune difficulté et tous les auteurs sont d'accord. Pour la vibration ω_4 dans les spectres des vapeurs, nous séparons très bien les trois branches de la bande de vibration-rotation.

Les auteurs sont aussi d'accord pour l'interprétation du mode ω_7 (vibration de déformation symétrique CH), et les calculs de la fonction potentielle faits par de Hemptinne et Doehaerd établissent bien ces valeurs. Nous les reprendrons donc, mais en signalant cependant une anomalie étonnante qui se présente à la fois dans les spectres des liquides et des vapeurs. Cette bande apparaît très intense pour CD₃OH et CD₃OD et se montre à peine pour CH₃OH et CH₃OD. Nous n'y voyons pas d'explication.

Restent les deux modes dégénérés $\omega_{5,6}$ et $\omega_{8,9}$ correspondant aux déformations CO et CH. Comme Noether nous admettrons le dédou-

blement de ces deux modes. Les valeurs des fréquences ont été recalculées au moyen des fonctions potentielles et nous suggérons d'y appliquer les bandes reprises dans le tableau III. Barker avait proposé d'attribuer la bande à 1340 de CH_3OH au mode $\omega_{5,6}$ mais cette interprétation est inacceptable, car elle conduit à des valeurs imaginaires dans le calcul de la fonction potentielle et elle amène d'autre part à une valeur inadmissible du rapport isotopique.

Pour tout cet ensemble de bandes les fréquences pour les liquides sont toujours un peu inférieures à celles des bandes correspondantes pour les vapeurs, comme cela arrive d'habitude.

Ces résultats sont rassemblés dans le tableau III.

TABLEAU III. — VIBRATIONS DU GROUPE $\text{CH}_3\text{O CD}_3\text{O}$

		CH ₃ OH	CH ₃ OD	CD ₃ OH	CD ₃ OD
VAPEURS					
ω ₄	}	1010	1013	965	965
		1032	1037	983	984
		1054	1063	1006	1004
ω _{5,6}	}	1131	1156		856
		1209	1206		899
ω ₇		1418	1468	1115	1116
				1135	1135
				1149	1149
ω _{8,9}	}	1437	1468	1057	1048
		1502			1073
LIQUIDES					
ω ₄		1027	1025	978	975
ω _{5,6}	}	1110	1099		852
		1198	—		911
ω ₇		1449	1456	1119	1117
ω _{8,9}	}	1426	1456	1022	1024
		1495		1057	1063

CONCLUSION.

Nous avons donc pu obtenir avec plus de détails que Noether les spectres des alcools deutérés, sous forme vapeur. Il nous fut de plus possible d'y ajouter les spectres des liquides.

Des résultats nouveaux sont acquis pour attribution des bandes dues aux modes de vibration du groupement hydroxyle. Quant aux modes de vibration du groupe méthyle, nous croyons pouvoir appuyer le dédoublement des modes dégénérés $\omega_{5,6}$ et $\omega_{8,9}$.

Il nous reste l'agréable devoir de remercier Mr le Professeur de Hemptinne de nous avoir proposé ce travail et de l'avoir soutenu de ses conseils. Nous remercions aussi le Fonds National de la Recherche Scientifique, à qui appartient le spectromètre que nous avons utilisé.

Azéotropes de sulfures confrontés avec des azéotropes d'halogénures

PAR

MAURICE LECAT

C'est principalement de sulfures d'alcoyle qu'il s'agira, mais on considérera, en outre, le sulfure de carbone, le thiofène et le thiofane ou sulfure de tétraméthylène. On envisagera des azéotropes de ces corps appariés à des individus chimiques dont les fonctions sont classées alphabétiquement. Ces azéotropes sont confrontés avec les azéotropes correspondants que forment des monohalogénures, en particulier d'alcoyle. Mais pour que les deux Δ , dans un même couple, soient suffisamment rapprochés, il a bien fallu parfois accueillir des halogénures aromatiques, savoir : le chlorbenzène, les para- et ortho-bromotoluènes, et aussi des bihalogénures : le bromure de propène (aux n^{os} 7, 9, 51 et 101) et le paradichlorbenzène (aux n^{os} 43, 53, 91, 97 et 104).

Les tableaux comportent ensemble 104 systèmes couplés. Ceux de n^o impair contiennent un halogénure ; ceux de n^o pair, un sulfure.

Voici la liste des sulfures mis en œuvre, rangés par croissance de la température d'ébullition, avec indication des halogénures qui leur sont couplés :

Sulfure de méthyle (abrégé en : S. de M), de p. éb. 37^o4, aux systèmes de n^{os} 62, 76, 80, 87, associé au bromure d'éthyle (br. d'É), de p. éb. 38^o4, aux n^{os} 61, 75, 79 et 88 ;

Sulfure de Carbone (CS₂), de p. éb. 46^o25, aux n^{os} 2, 14, 20, 26, 30, 32, 56, 64, 66, 68, 70, 72, 74, 78, 82, 86, 90, 94, associé au chlorure de propyle (chl. P), de p. éb. 46^o65, aux n^{os} 1, 13, 19, 25, 29, 31, 55, 63, 65, 67, 69, 71, 73, 77, 81, 85, 89, 93 ;

Thiofène, de p. éb. 84^o7, aux n^{os} 16, 22, associé soit au chlorure de butyle (chl. B), de p. éb. 78^o5, au n^o 15, soit à l'iodure d'isopropyle (I. i. P), de p. éb. 89^o45, au n^o 21 ;

Sulfure d'éthyle (S. d'É), de p. éb. 92^o1, aux n^{os} 4, 18, 24, 28, 34, 84, associé au bromure d'isobutyle (br. i. B), de p. éb. 91^o4, aux n^{os} 3, 17, 27, 33 et 83 ;

Thiofane, de p. éb. 118°8, au n° 36, associé au bromure d'isoamyle (br. i. A), de p. éb. 120°65, au n° 35;

Sulfure d'isopropyle (S. i. P.), de p. éb. 120°5, aux n°s 6, 38, 40, 46, 58, 60, associé au bromure d'isoamyle, aux n°s 5, 37, 39, 45, 57, 59;

Sulfure d'allyle (S. all.), de p. éb. 139°35, aux n°s 8, 10, 42, 48, 50, associé soit au bromure de propène (br. pr^{ne}), de p. éb. 140°5, aux n°s 7, 9, 47, soit au chlorbenzène (chlorb.), de p. éb. 131°75, aux n°s 41 et 49;

Sulfure de propyle (S. de P), de p. éb. 141°5, aux n°s 52, 102, associé au bromure de propène, de p. éb. 140°5, aux n°s 51 et 101;

Sulfure d'isobutyle (S. i. B), de p. éb. 172°0, aux n°s 44, 54, 92, 98, 104, associé au paradichlorbenzène, de p. éb. 174°4, aux n°s 43, 53, 91, 97 et 103;

Sulfure de butyle (S. de B), de p. éb. 185°0, aux n°s 12, 96, 100, associé soit au parabromotoluène, de p. éb. aussi 185°0, aux n°s 11, 99, soit à l'orthobromotoluène, de p. éb. 181°5, au n° 95.

Acides

A	B	Éb. A	Δ	Éb. az.	δ	% A	
Méthanoïque	Chl. P	100,75	54,1	45,7	0,95	8	[1]
»	CS ²	»	54,5	42,55	3,7	17	[2]
»	Br. i. B	»	9,35	76,7	14,7	30	[3]
»	S. d'É	»	8,65	82,2	9,9	35	[4]
Éthanoïque	Br. i. A	118,1	2,55	108,65	9,45	37	[5]
»	S. d'i. P	»	2,4	111,5	6,6	48	[6]
»	Br pr ^{ne}	»	22,4	116,0	2,1	70	[7]
»	S. all.	»	21,25	116,55	1,55	78,5	[8]
Propanoïque	Br. pr ^{ne}	141,3	0,8	134,5	6,0	33	[9]
»	S. all.	»	1,95	134,6	4,75	40	[10]
M.-3 butanoïque	-toluène	176,5	8,5	173,0	3,5	48	[11]
» [p-Bromo-	S. de B	»	»	175,0	1,5	73	[12]

Alcools

Méthanol	Chl. P	64,65	18,0	40,6	6,05	10	[13]
»	CS ²	»	18,4	37,65	8,6	14	[14]
»	Chl. B	»	13,85	57,2	7,45	28,5	[15]
»	Thiofène	»	20,05	< 59,55	> 5,1	< 55	[16]
»	Br. i. B	»	26,75	61,55	3,1	42	[17]
»	S. d'É	»	27,45	61,2	3,45	62	[18]

Éthanol	Chl. P	78,3	31,65	44,95	1,7	6	[19]
»	CS ²	»	32,05	42,6	3,65	9	[20]
»	I. i. P	»	8,15	70,2	8,1	25	[21]
»	Thiofène	»	6,4	70,0	8,3	45	[22]
»	Br. i. B	»	13,1	72,5	5,8	33	[23]
»	S. d'É	»	13,8	72,6	5,7	56	[24]
Propanol-2	Chl. P	82,4	35,75	46,4	0,25	2,8	[25]
»	CS ²	»	36,15	44,22	2,03	7,6	[26]
»	Br. i. B	»	9,0	77,5	4,9	33	[27]
»	S. d'É	»	9,7	< 78,0	> 4,4	< 52	[28]
Triméthylcar-	Chl. P	82,45	35,8	Zéotr. fort. positive			[29]
» [-tinol	CS ²	»	36,2	44,9	1,35	7	[30]
Propanol-1	Chl. P	97,2	50,55	Zéotr. fort. positive			[31]
»	CS ²	»	50,95	45,65	0,6	5,5	[32]
»	Br. i. B	»	5,8	85,2	6,2	21	[33]
»	S. d'É	»	5,1	85,5	6,6	28	[34]
»	Br. i. A	»	23,45	95,35	1,85	58	[35]
»	Thiofane	»	21,6	96,5	0,7	90	[36]
Isobutanol	Br. i. A	108,0	12,65	104,55	3,45	44	[37]
»	S. i. P	»	12,5	105,8	2,2	73	[38]
Butanol-1	Br. i. A	117,8	2,85	110,65	7,2	31,5	[39]
»	S. i. P	»	2,7	112,0	5,8	45	[40]

Alcools-amines

Aminoéthanol	Chlorb.	170,8	39,05	128,55	3,2	13,8	[41]
»	S. all.	»	31,45	137,2	2,15	8	[42]
» [Paradichlorbenzène	»	»	3,6	154,6	16,2	35	[43]
»	S. i. B	»	1,2	156,0	14,8	33	[44]

Alcools halogénés

Chloréthanol	Br. i. A	128,6	7,95	113,0	7,65	24	[45]
»	S. i. P	»	8,1	115,5	5,0	30	[46]
»	Br. pr ^{ne}	»	11,9	126,0	2,6	...	[47]
»	S. all.	»	10,75	124,5	4,1	61	[48]

Alcools-oxydes

Méthylglycol	Chlorb.	124,5	7,25	119,45	5,05	47,5	[49]
»	S. all.	»	14,85	122,5	2,0	75	[50]
Éthylglycol	Br. pr ^{ne}	135,3	5,2	132,5	2,8	50	[51]
»	S. de P	»	6,2	130,2	5,1	52	[52]
Butylglycol	Paradi-	171,15	3,25	168,3	2,85	52	[53]
[chlorbenz.	S. i. B	»	0,85	163,8	7,35	42	[54]

Cétones

Diméthylcétone	Chl. P	56,15	9,5	45,8	0,85	15	[55]
»	CS ²	»	9,9	39,25	7,0	33	[56]
M. i. B. cétone	Br. i. A	116,05	4,6	115,6	0,45	70	[57]
»	S. i. P	»	4,45	114,9	1,15	72	[58]
É. P. cétone	Br. i. A	123,3	2,65	119,8	0,85	55	[59]
-	S. i. P	»	2,85	119,0	1,5	32	[60]

Esters

Form. méthyle	Br. d'É	31,7	6,7	29,85	1,85	>66	[61]
»	S. de M	»	5,7	29,0	2,7	62	[62]
»	Chl. P	»	14,95	Zéotr. fort. positive			[63]
»	CS ²	»	14,55	24,75	6,95	67	[64]
Nitrite propyle	Chl. P	47,75	1,1	45,6	1,05	38	[65]
»	CS ²	»	1,5	40,15	6,1	38	[66]
Form. éthyle	Chl. P	54,15	7,5	46,25	0,4	15	[67]
»	CS ²	»	7,9	39,35	6,9	37	[68]
Acét. méthyle	Chl. P	56,95	10,3	Zéotr. fort. positive			[69]
»	CS ²	»	10,7	39,55	6,7	30	[70]
Nitrite d'i. B	Chl. P	67,1	20,45	Zéotr. légèr ^t positive			[71]
»	CS ²	»	20,85	45,55	0,7	14	[72]
Acét. d'éthyle	Chl. P	77,1	30,45	Z. très légèr ^t positive			[73]
»	CS ²	»	30,85	46,02	0,23	7,3	[74]

Hydrocarbures

Isopentane	Br. d'É	27,95	10,45	23,7	4,25	30	[75]
»	S. de M	»	9,45	<27,8	>0,15	<96	[76]
Pentane	Chl. P	36,15	10,5	<34,8	>1,35	>68	[77]
»	CS ²	»	10,1	35,7	0,45	89	[78]
Triméthyléthyl-	Br. d'É	37,1	1,3	35,0	2,1	>41	[79]
» [-ne	S. de M	»	0,3	34,5	2,6	48	[80]

Nitrodérivé

Nitrométhane	Chl. P	101,2	54,55	Zéotr. moyent ^t positive			[81]
»	CS ²	»	54,95	44,25	2,0	10,0	[82]
»	Br. i. B	»	9,8	84,0	7,4	34	[83]
»	S. d'É	»	9,1	85,0	7,1	30	[84]

Oxydes

Ox. d'éthyle	Chl. P	34,6	11,05	Zéotr. ∞ idéale			[85]
»	CS ²	»	11,65	34,5	0,1	87?	[86]
Méthylal	Br. d'É	42,3	3,9	Zéotropie positive			[87]
»	S. de M	»	4,9	35,7	1,7	...	[88]
»	Chl. P	»	4,35	Quasi-az. positive			[89]
»	CS ²	»	3,95	37,25	5,05	54	[90]
Ox. d'isoamyle	Paradi-	173,2	1,2	172,1	1,1	63,5	[91]
» [-chlorbenz.	S. i. B	»	»	171,0	1,0	38	[92]

Oxydes halogénés

Ox. M. chloré	Chl. P	59,15	12,5	Zéotr. fort. positive			[93]
»	CS ²	»	12,9	43,1	3,15	25	[94]
Dichloréther s.	Orthobro	178,65	2,85	<177,9	>0,75	>63	[95]
» [-motoluène	S. de B	»	6,35	178,4	0,25	88	[96]

Phénols

Hydroxybenzène	Paradi-	182,2	7,8	171,05	3,35	25,2	[97]
» [-chlorbenz.	S. i. B	»	10,2	<170,5	>1,5	<28	[98]
»	Parabro-	»	2,8	176,2	6,0	44	[99]
» [motoluène	S. de B	»	»	177,5	4,7	45	[100]

Varia

Pyrrole	Br. pr ^{ne}	130,0	10,5	Quasi-az. positive			[101]
»	S. de P	»	11,5	127,5	2,5	65	[102]
Uréthanne éthyl.	Paradi-	185,25	10,65	167,0	7,4	24,2	[103]
» [-chlorbenz.	S. i. B	»	13,25	166,5	5,5	23	[104]

L'examen du matériel expérimental consigné dans ces tableaux conduit à cette conclusion : si, pour les diverses fonctions chimiques appariées aux sulfures, les groupes d'azéotropes sont confrontés avec les groupes correspondants que forment des mono- ou des bihalogénures, on constate que le comportement des uns est, en quelque manière, à peu près parallèle au comportement des autres. Il y a là certainement une régularité.

Toutefois, le sulfure de carbone, qui se distingue des autres sulfures par l'absence d'hydrogène, fait exception nette, car, à égalité de Δ , il donne des abaissements azéotropiques beaucoup plus prononcés.

Pour tous ces systèmes l'azéotropie est positive; ce qui pourrait donner à penser — à tort — que les sulfures ne formeraient pas d'azéotropes négatifs. Voici un cas de négativité :

Bromoforme	S. de P	149,5	8,0	151,5	-2,0	90	[105]
------------	---------	-------	-----	-------	------	----	-------

Dans ce système, le signe négatif tient surtout au mode de polarité de la molécule de bromoforme et est marqué par la triade d'atomes d'halogène.

Uccle-Bruxelles,

Laboratoire privé de l'auteur.

10 avril 1947.

Azéotropes d'Oxydes

PAR

MAURICE LECAT

Le terme oxyde est pris au sens large incluant ce que nous appelons des oxydes *mixtes*, c'est-à-dire affectés d'une autre fonction chimique. Nous considérons : des alcools-oxydes, des aldéhydes-oxydes, des amines-oxydes, des esters-oxydes (qu'il ne faut pas confondre avec éthers), des oxydes halogénés et des oxydes-phénols.

Ce travail consigne 176 azéotropes, dont 17 négatifs, et 175 systèmes zéotropiques des diverses sortes. En outre, il réfère à plusieurs autres mémoires qui colligent un grand nombre des uns et des autres contenant un oxyde.

Les azéotropes négatifs — dont la proportion est statistiquement normale — ont les n^{os} 1, 2, 123/7, 135, 145, 151/2, 154/5, 161/4 et un de leurs constituants est le dioxane, un phénol, le tétrachloréthane s., le chloracétate d'éthyle ou l'acétate d'éthylglycol. Les deux élévations majeures sont 13°6, pour [127], et 12°0, pour [1].

Par souci de concision extrême, nous ne reproduisons pas la liste des abréviations dont il est usé dans nos travaux précédents. La lettre *z* désigne zéotropie. Nous en sous-entendrons désormais la positivité, pour n'en expliciter plus que la négativité, beaucoup moins fréquente. Ainsi, par exemple, la lettre *f* isolée remplace « fortement positive » (zéotropie sous-entendue) et t. l. n. signifie « zéotropie très légèrement négative ». Voici quelques nouvelles abréviations : b. = benzène, by = benzyle, bz = benzoate, gl = glycol, hété. = hétéroazéotropie, ph. = phényl(e).

Ces *Annales* = *A. — Annales de Chimie* (Paris) (12) 2 (1947), fasc. pour mars-avril, p. 158-202 = *Ann. Ch.*

Acides et Oxydes

A	B	Éb. A	Éb. B	Éb. az	% A	Mixt.
Méthanoïque ⁽¹⁾	Dioxane	100,75	101,35	113,35	43	50 : -8,0 [1]
Éthanoïque ⁽²⁾	»	118,1	»	119,5	77	9 : -0,7 [2]
M.-2 propanoï. ⁽³⁾	Anisole	154,6	153,85	149,0	42	50 : 1,8 [3]
Butanoïque ⁽⁴⁾	Phénétole	164,0	170,45	162,35	65	50 : 0,1 [4]
» ⁽⁵⁾	Ox. d'isoam-	»	173,2	161,8	54	63 : 0,3 [5]
Pentanoïque ⁽⁶⁾	» [-yle]	186,35	»	171,8	12,5	10 : 0,2 [6]
Ac. benzoïque	Safrole	250,8	235,9	234,75	12,5	Ξ _c 47 [7]
»	Isosafrole	»	252,0	246,5	53,5	Ξ _c 89 [8]
»	Ox. phényle	»	259,0	247,3	59	Ξ _c 99 [9]
Nonanoïque	Isosafrole	254,0	252,0	249,5	35	— [10]
»	Ox. phényle	»	259,0	250,5	55	F [11]
Ph. éthanoïque ⁽⁷⁾	»	266,5	»	255,05	27,8	Ξ _c 30,6 [12]

⁽²⁾ Pour le propanoïque, cf. *Ann. Ch.*, n^{os} 571/2. — ⁽⁴⁾ Cf. *ib.*, n^o 120. — ⁽⁵⁾ Pour le M.-3 butanoïque-1, cf. *ib.*, n^{os} 464/7. — ⁽⁶⁾ Cf. *ib.*, n^{os} 526/7.

Z. — ⁽¹⁾ et méthylal (42,3), l. n. — ⁽²⁾ et anisole (153,85), l. n. — ⁽³⁾ et ox. i. B (122,3), m. — ⁽⁴⁾ Cf. *Ann. Ch.*, p. 166. — ⁽⁵⁾ Cf. *ib.*, p. 184. — ⁽⁷⁾ et anéthole (235,7), f.

Acides et Oxydes mixtes

Éthanoïque ⁽¹⁾	Épichlorhy-	118,1	216,4	115,05	34,5	30 : 2,1	[13]
Hexanoïque	Gaïacol[drine]	205,15	205,05	200,8	42	F	[14]

Z. — ⁽¹⁾ Propanoïque (141,3), l. — M.-2 prop. (154,6) et épibromh. (138,5), m.

Acides-cétones et Oxydes, cf. *A*, LX, 234 (1946).

Acides halogénés et Oxydes

Chloréthanoïque	Ox. isoamyl.	189,35	173,2	171,95	16	F	[15]
Brométhanoïque	Gaïacol	205,1	205,05	203,7	40	F	[16]

Z. — Chloréthanoïque et cinéole (176,35), m. n.

Alcools et Oxydes

Cette question est déjà traitée amplement dans un mémoire consacré à des azéotropes d'alcools, *Z. anorg. allg. Chemie*, 186 (1930), p. 130/6. Nous apportons ici amendements et compléments :

Méthanol ⁽¹⁾	Ox. É et P	64,65	63,85	55,5	24	25 : 0,8	[17]
Éthanol ⁽²⁾	Ox. propyle	78,3	90,1	74,4	44	50 : 2,8	[18]
Propanol-2 ⁽³⁾⁽⁴⁾	Éthylal	82,4	87,95	79,6	52	58 : 5,2	[19]
Propanol-1 ⁽⁵⁾	Dioxane	97,2	101,35	95,3	55	85 : 5,0	[20]
Isobutanol ⁽⁶⁾⁽⁷⁾	Ox. propyle	108,0	90,1	89,5	10	5 : 1,0	[21]
Iso. B. carbinol ⁽⁸⁾	Paraldéhyde	131,9	124,35	123,5	22	22 : 5,0	[22]
Pentanol-1	Ox. butyle	138,2	142,4	134,5	50	50 : 2,5	[23]
Hexanol-1 ⁽⁹⁾	Ox. isoamyle	157,85	173,2	157,0	89	90 : 1,5	[24]

Cyclohexanol ⁽¹⁰⁾	Ox. M. et By.	160,8	167,8	159,0	62	90 : 1,0	[25]
Heptanol-1 ⁽¹¹⁾	Cinéole	176,15	176,35	173,0	48	20 : 0,5	[26]
Octanol-2 ⁽¹²⁾	Ox. amyle n.	180,4	187,5	179,8	86	95 : 0,6	[27]
Octanol-1 ⁽¹³⁾	Ox. M. isobornyle	195,2	192,4	191,9	30	—	[28]
Éthanediol	Ox. amyle n.	197,4	187,5	168,8	26	Héter.	[29]
» ⁽¹⁴⁾	Ox. É. iso-	»	203,8	176,5	33	»	[30]
Phénylcarbol ⁽¹⁵⁾	[bornyle	205,25	»	201,0	39	40 : 2,2	[31]
Glycérol	Anéthole	290,5	235,7	230,8	14	Héter.	[32]

(¹) Cf. *Ann. Ch.*, n° 274. — (⁴) Pour le propénol, cf. *l. c.*, n° 35. — (⁷) Pour le butanol-1, n°s 133/4. — (¹⁴) Cf. *l. c.*, n° 616.

Z. — (¹) et acétal (103,55), f. — (²) et méthylal (42,3), f.; ox. i. B (122,3), m. — (³) et méthylal (42,3), m.; dioxane (101,35), q.-az.; acétal (103,55), f.; ox. i. B (122,3), m. — (⁵) et ox. É (34,6), l.; ox. i. B (122,3), f. — (⁶) et dioxane (101,35), q.-az. — (⁷) Pour le butanol-1, cf. *Ann. Ch.*, p. 167. — (⁸) et anisole (153,85), q.-az. 50 : 6,1; ox. i. A (173,2), f. — (⁹) et ox. i. B (122,3), m.; cinéole (176,35), f. — (¹⁰) et ox. A (187,5), f. — (¹¹) et anisole (153,85), m. — (¹²) et phénétole (170,45), l. — (¹³) et ox. i. A (173,2), m.; cinéole (176,35), idéale. — (¹⁴) et paralaldéhyde (124,35), m. — (¹⁵) et ox. M. isoborn. (192,4), f.; safrole (235,9), m.

Alcools et Oxydes mixtes

Propénol-3	Épichlorhy-	96,85	116,4	95,75	78	78 : 4,8	[33]
Butanol-2	» [drine ⁽¹⁾	99,5	»	98,0	75	—	[34]
DiM.É. carbinol	»	102,35	»	100,7	70	70 : 7,0	[35]
M.i.P. carbinol	»	112,9	»	109,5	52	10 : 3,4	[36]
Diéthylcarbinol	»	116,0	»	111,5	46	10 : 3,2	[37]
Butanol-1	» [drine	117,8	»	112,0	43	40 : 8,0	[38]
»	Épibromhy-	»	138,5	117,0	80	—	[39]
M.P. carbinol	Épichlorhyd	119,8	116,4	113,0	40	10 : 3,0	[40]
Heptanol-1	Dichloréther	176,15	178,65	173,5	50	50 : 6,5	[41]
Éthanediol	» [sym. ⁽²⁾	197,4	»	171,05	21	Ξ 115	[42]
»	Gaïacol ⁽³⁾	»	205,05	190,4	46	F	[43]
»	Eugénol	»	254,8	196,8	90	—	[44]
Phénylcarbinol	Gaïacol	205,25	205,05	204,25	43	F	[45]
Glycérol	Eugénol	290,5	254,8	251,3	14	Ξ 166	[46]

(¹) Pour d'autres az. de (¹). cf. L'Azéotropisme, Bruxelles, 1918, p. 89.

Z. — (¹) et méthanol (64,65), m.; éthanol (78,3), f.; propanol-2 (82,4), t. f.; butanol 3^{re} (82,45), f.; hexanol-1 (157,85) et cyclohexanol (160,8), m. — (²) et isobutylcarbinol (131,9), f. [53 : 6,8]; cyclopentanol (140,85), t. f.; octanol-1 (195,2), f. — (³) et bornéol (215,0), f.; glycérol (290,5), m.

Alcools-amines et Alcools-oxydes

Cf. A., LX (1946), p. 173/4.

Alcools-amines et Oxydes, cf. A., *ib.*, p. 175.

Lactate de M.	Anisole	143,8	153,85	142,8	82	80 : 1,3	[47]
Lactate d'É ⁽¹⁾	»	154,1	»	150,1	44,5	40 : 1,8	[48]
Lactate de P	Phénétole	171,7	170,45	167,1	50	50 : 1,8	[49]
» ⁽²⁾	Ox. isoam, le	»	173,2	167,5	53	50 : 2,2	[50]
Lactate d'isobut.	Cinéole	182,15	176,35	174,0	32	—	[51]
Monoacét. du	Ox. isoamyle	190,9	173,2	170,2	28	50 : 3,0	[52]
» [glycol	Cinéole	»	176,35	174,1	22	50 : 1,2	[53]
» ⁽³⁾	Ox. d'amyle	»	187,5	180,8	42	70 : 2,3	[54]

Z. — ⁽¹⁾ et phénétole (170,45), f. — ⁽²⁾ et anisole (153,85), f. — ⁽³⁾ et dichlor-
éthér s. (178,65), l. n.; gaïacol (205,05), m. n.

Alcools halogénés et Oxydes

Chloréthanol ⁽¹⁾	Anisole	128,6	153,85	128,55	97,5	59 : 2,6	[55]
Dichlor-1-3 pro-	Phénétole	175,8	170,45	168,8	37	20 : 2,9	[56]
» [anol-2	Ox. isoamyl.	»	173,2	165,7	48	48 : 0,1	[57]
» ⁽²⁾	Ox. M. p. crés.	»	177,05	173,1	59	76 : 1,6	[58]

Z. — ⁽¹⁾ et dioxane (101,35), f. n.; phénétole (170,45), m.; ox. i. A (173,2), f.
— ⁽²⁾ et anisole (153,85), m.

Alcools-oxydes (début)

Méthyltriglycol	Diglycol	245,25	245,5	245,0	78	—	[59]
Butylglycol	Benzaldéhy.	171,15	179,2	170,95	91	46 : 1,4	[60]
Propylglycol	Furfural ⁽¹⁾	151,35	161,45	151,1	86	67 : 1,1	[61]
Butylglycol ⁽²⁾	»	171,15	»	161,2	12	50 : 1,5	[62]

Z. — ⁽¹⁾ et Ê. gl. (135,3), m. — ⁽²⁾ et éthanamide (221,15), idéale; propa-
namide (222,2), t. l. — Diglycol (245,5) et éthanamide, l.

Alcools-oxydes et Amines, cf. A, LX, p. 176.

Alcools-oxydes et Cétones, cf. A, LX, p. 239.

Alcools-oxydes et Eau

Méthylglycol	Eau ⁽¹⁾	124,5	100,0	99,75	18,5	43 : -11,0	[63]
Propylglycol	»	151,35	»	98,75	28	45 : -7,5	[64]
Butylglycol ⁽²⁾	»	171,15	»	99,05	24	47 : -3,6	[65]

Z. — ⁽¹⁾ et Méthyl diglycol (192,95) ou diglycol (245,5), m.

⁽²⁾ Pour la courbe de saturation, cf. Acad. R. Belg., Sc., Mém. 8^o, 1944.

Alcools-oxydes et Esters

Méthylglycol	Acét. isobut.	124,5	117,2	115,5	16	16 : 1,0	[66]
»	Butyr. éthyle	»	121,5	117,8	32	30 : 1,0	[67]
»	Form. d'i. A	»	123,8	119,25	40	36 : 1,2	[68]
» ⁽¹⁾	Acét. butyle	»	126,0	119,45	48	76 : 1,2	[69]
Éthylglycol	»	135,3	»	125,35	10	16 : 1,8	[70]
» ⁽²⁾	Butyr. prop.	»	143,7	133,5	70?	80 : 1,5	[71]
Propylglycol ⁽³⁾	Valér. n. Ê	151,35	145,75	144,0	22	50 : 2,2	[72]
Butylglycol ⁽⁴⁾	But. i. A ⁽⁵⁾	171,15	181,05	170,85	86	90 : 0,5	[73]
Méthyltriglycol	Bz. isoamyle	245,25	262,0	239,4	60	—	[74]
Diglycol ⁽⁶⁾	Benz. propyl	245,5	230,85	222,7	26	—	[75]
»	Bz. isobutyle	»	241,9	228,65	37	ξ 86	[76]
»	Benz. butyle	»	249,0	232,2	43	ξ 102	[77]
»	Phtalate M	»	283,7	245,4	96,3	—	[78]

⁽²⁾ Cf. Ann. Ch., n^o 622. — ⁽⁴⁾ Cf. ib., n^o 631. — ⁽⁵⁾ Pour le M. digl., cf. ib.,
n^o 637. — ⁽⁶⁾ Cf. ib., n^{os} 191/6. — ⁽⁷⁾ Pour le triglycol, cf. l. c., n^o 641.

Z. — ⁽¹⁾ et nitrate i. A (149,75), q.-az. — ⁽²⁾ et nitrate P (110,5), f.; form.
i. A (123,8), q.-az. — ⁽³⁾ et diacét. d'éthylidène (168,5), m. — ⁽⁴⁾ et nitrate i. A
(149,75), q.-az.; fumar. (193,25) ou bz. M (199,4), m. — ⁽⁵⁾ et bz. M, f. [50 :
0,4]; maléate M (204,05) ou phtal. Ê (298,5), q.-az.

Alcools-oxydes et Esters mixtes

Éthylglycol	Chloracét. É.	135,3	143,55	134,8	68	50 : 2,3	[79]
Propylglycol ⁽¹⁾	Acét. É. gl.	151,35	156,8	151,25	87,5	88 : 1,5	[80]
Butylglycol ⁽²⁾	Butoxyle	171,15	171,75	170,1	53	—	[81]
M. triglycol	Salicyl. É.	245,25	233,8	227,7	28	—	[82]
Diglycol	"	245,5	"	225,15	30	Σ66,5	[83]

Z. — M. gl. (124,5) et acét. M. gl. (144,6), m.; acét. É. gl. (156,8), l. É. gl. (135,3) et acét. M. gl. (144,6), f. [89 : 1,1]; acét. É. gl. (156,8), m. — ⁽¹⁾ et acét. M. gl. (144,6), f.; butoxyle (171,75), m. — ⁽²⁾ et acét. É. gl. (156,8), ∞ idéale [50 : 2,3].

Alcools-oxydes et Halogénures

Méthylglycol ⁽¹⁾	Perchloréthyl.	124,5	121,0	109,7	24,5	21 : 2,1	[84]
Éthylglycol ⁽²⁾	Br. éth. [lène	135,3	131,65	127,75	23	25 : 0,6	[85]
"	Bromobenzène	"	156,1	135,22	86	73 : -0,7	[86]
Propylglycol ⁽³⁾	" [-ne	151,35	"	148,2	48	50 : -0,4	[87]
"	p.-Chlortol.	"	162,4	149,7	70	—	[88]
Butylglycol ⁽⁴⁾	Bromobenz.	171,15	156,1	155,85	6,5	50 : -0,3	[89]
"	p.-Chlortol.	"	162,4	160,5	20	—	[90]
"	o.-Dichlorb.	"	179,5	170,0	73	—	[91]

⁽¹⁾ Cf. *Ann. Ch.*, nos 618/9. — ⁽²⁾ Cf. *ib.*, nos 623/4. — ⁽³⁾ Cf. *ib.*, nos 626/7. — ⁽⁴⁾ Cf. *ib.*, nos 632/3. — Pour le digl., cf. *ib.*, nos 198-200; pour le trigl., n° 642.

Z. — ⁽²⁾ et iodure P (102,4), m.; tétrachloréthane s. (146,2), t. l. [50 : -9,2]; bromoforme (149,5), t. f.; parachlortoluène (162,4), f. — ⁽³⁾ et br. éthylène (131,65), m.; tétrachloréthane s. (146,2), m. n. [46 : -7,1]; paradichlorb. (174,4), t. f. — ⁽⁴⁾ et bromoforme (149,5), m.

Alcools-oxydes et Hydrocarbures

Méthylglycol ⁽¹⁾	M. cyclohexane	124,5	101,15	94,2	25	—	[92]
"	Diisobutyle	"	109,4	100,0	33	—	[93]
"	Octane n.	"	125,75	110,0	48	50 : 0,5	[94]
"	Éthylbenz.	"	136,15	118,8	55	55 : 2,6	[95]
Éthylglycol ⁽²⁾	Heptane n.	135,3	98,4	96,5	14	50 : 3,3	[96]
"	Toluène	"	110,75	110,15	10,8	17 : 2,0	[97]
"	Paraxylène	"	138,45	128,6	50	—	[98]
"	Diisoamyle	"	160,2	130,8	63	80 : 2,2	[99]
Propylglycol ⁽³⁾	Éthylbenz.	151,35	136,15	134,5	20	20 : 1,5	[100]
"	Propylbenz.	"	159,3	147,8	60	50 : 2,2	[101]
Butylglycol ⁽⁴⁾	Mésitylène	171,15	164,6	162,0	32	—	[102]
"	Paracymène	"	176,7	168,0	60	60 : 2,5	[103]
Méthyldiglycol	Naphtalène	192,95	218,0	192,2	89	—	[104]
Méthyltriglycol	"	245,25	"	214,8	20	—	[105]
"	β-M.naphtal.	"	241,15	229,4	44	—	[106]
"	Acénaphène	"	277,9	242,5	71	—	[107]
Diglycol ⁽⁵⁾	β-M.naphtal.	245,5	241,15	225,45	39	Σ123,5	[108]
"	Diph.méthane	"	265,4	236,0	52	—	[109]
Triglycol ⁽⁶⁾	Diphényle	288,7	256,1	255,3	10	—	[110]
"	Diph. méth.	"	265,4	263,0	20	—	[111]

⁽¹⁻⁶⁾ Pour d'autres az. de ces corps, cf. *Ann. Ch.*, nos 201/3, 620/1, 625, 628, 643.

Z. — ⁽¹⁾ et b. (80,15) [50 : 3,2] ou P. b. (159,3), q.-az. — ⁽²⁾ ou ⁽³⁾ et paracy-mène (176,7), m. ou f. — ⁽⁴⁾ et orthoxylène (144,3), f. [50 : 2,5]. — ⁽⁵⁾ et B. b. (183,1), m. — ⁽⁶⁾ et β -M. naphtalène (241,15), t. f.

Alcools-oxydes et Nitriles

Z. — M. glycol (124,5) et pentane nitrile (141,3), f. — B. glycol (171,15) et benzonitrile (191,1), m.

Alcools-oxydes et Nitrodérivés ou Nitrohalogénures

Cf. A., LXI (1947), p. 85/7.

Alcools-oxydes et Oxydes

Méthylglycol	Ox.isobutyle	124,5	122,3	115,0	48	50 : 3,0	[112]
» ⁽¹⁾	Paraldéhyde	»	124,35	118,6	35	—	[113]
Éthylglycol	»	135,3	124,35	123,8	14	—	[114]
»	Ox. butyle	»	142,4	130,2	55	55 : 2,5	[115]
»	Anisole	»	153,85	135,25	94	50 : 1,1	[116]
Propylglycol ⁽²⁾	Ox. isoamyl.	151,35	173,2	150,1	77	50 : 2,4	[117]
Butylglycol ⁽³⁾	Phénétole	171,15	170,45	167,1	52	50 : 0,9	[118]
»	Ox. amyle	»	187,5	169,0	67	—	[119]
M. diglycol	Cinéole	192,95	176,35	173,0	27	—	[120]
Diglycol ⁽⁴⁾	Safrole	245,5	235,9	225,5	33	Σ84,5	[121]
Triglycol ⁽⁵⁾	Ox. phényle	288,7	259,0	258,7	3	—	[122]

⁽²⁻⁴⁾ Pour d'autres az. de ces corps, cf. *Ann. Ch.*, nos 208/10, 629, 634.

Z. — ⁽¹⁾ et ox. P (90,1) ou anisole (153,85), f. — ⁽²⁾ et paraldéh. (124,35), m.; phénétole (170,45), f.; cinéole (176,35), q.-az. — ⁽³⁾ et anisole (153,85), q.-az.; ox. M. et isoborn. (192,4), f. — ⁽⁵⁾ et isosafrole β (252,0), f.

Alcools-oxydes et Phénols

Propylglycol ⁽¹⁾	Phénol	151,35	182,2	182,65	14	F	[123]
Butylglycol	»	171,15	»	186,35	37	F	[124]
» ⁽²⁾	Orthocrésol	»	191,1	191,55	15	F	[125]
Méthylidiglycol	Phénol	192,95	182,2	199,65	61	F	[126]
Diglycol	Pyrocatech.	245,5	245,9	259,5	46	F	[127]
» ⁽³⁾	Orthonitrophénol	»	217,2	216,0	10,5	Σ42	[128]

Z. — ⁽¹⁾ et orthocrésol (191,1), m. n. — ⁽²⁾ et paracr. (201,7), m. n. — ⁽³⁾ et orthoxylénol as. (226,8), m. n.; naphtol α (288,5), m. — En outre : É. gl. (135,3) et phénol (182,2), m. n.; M. trigl. (245,25) et naphtol α (288,5).

Alcools-oxydes et Sulfures, cf. *Ac. Belg., Bull. Sc.* (5) 43 (1947).

Alcools-oxydes et Varia,

cf. A, LXI (1947), p. 73/7; *Ann. Ch.*, p. 168, 190 et n° 213.

Aldéhydes et Oxydes

Benzaldéhyde	Cinéole	179,2	176,35	172,05	36	25 : 1,8	[129]
»	Ox. d'amyle	»	187,5	175,2	[130]
Phénylacroléine	Isosafrole	253,7	252,0	251,3	23	11 : -0,5	[131]
»	Ox. phényle	»	259,0	253,0	65	F	[132]
Citronellal	Gaiacol	208,0	205,05	204,55	13,5	F	[133]

Aldéhydes-oxydes et Fonctions diverses

Furfural ⁽¹⁾	Eau [thane s.	161,45	100,0	97,85	35	—	[134]
» ⁽²⁾	Tétrachloré-	»	146,2	161,55	97	50 : -2,1	[135]
»	Bromobenzène	»	156,1	153,3	23	23 : 2,1	[136]
»	Pentachloré-	»	162,0	156,75	40	50 : -1,0	[137]
» ⁽³⁾	Pinène α[thane	»	155,8	143,4	38	ξ62,4	[138]
»	Camphène	»	159,6	146,75	40	ξ48	[139]
»	Mésitylène	»	164,6	155,2	60	60 : 3,6	[140]

⁽²⁾ Pour d'autres az. avec des halogénures, cf. *Ann. Ch.*, nos 294/9. —

⁽³⁾ Avec des hydrocarbures, cf. *ib.*, nos 300/8.

Z. — ⁽¹⁾ et acét. É. gl. (156,8) ou butoxyde (171,75), q.-az. — ⁽²⁾ et br. propène (140,5) ou perchloréthane (184,8), f. p. — ⁽³⁾ et 1-3-diméthylcyclohexane (120,7), f.

Aldéhydes-oxydes et Oxydes, etc.

Furfural ⁽¹⁾	Anisole	161,45	153,85	153,2	22	17 : 2,0	[141]
»	Ox. isoamyl.	»	173,2	153,9	55	ξ37,5	[142]
» ⁽²⁾	Cinéole	»	176,35	157,25	60	90 : 1,5	[143]
Anisaldéhyde ⁽³⁾	Isosafrole	249,5	252,0	248,6	60	—	[144]
»	Pyrocatech.	»	245,9	253,0	75	F	[145]

⁽¹⁾ Pour d'autres az. du furfural, cf. *Ann. Ch.*, (1 c.), nos 309/10.

Z. — ⁽³⁾ et safrole (235,9) ou ox. de M. et eugényle (254,7), m.; ox. phényle (259,0), q.-az.

Z. — ⁽²⁾ et dichloréther s. (178,65), m. [47 : 0,7]; sulfure P (141,5), f.; sulfure B (185,0) ou uréthane É. (185,25), m.

Amides et Amines-oxydes, cf. *A.*, LX, p. 177 (1946).

Amides et Oxydes

Éthanamide	Ox. isoamyle	221,15	173,2	166,95	14,5	Hétér.	[146]
» ⁽¹⁾	Ox. M. p. crés.	»	177,05	174,2	11	ξ107	[147]
»	Ox. d'amyle	»	187,5	178,0	20	—	[148]
» ⁽²⁾	Dichloréther s.	»	178,65	178,25	3	F	[149]

⁽¹⁾ Pour d'autres az., cf. *A.*, 47 (1927), II, p. 96, et *Ann. Ch.*, nos 261/4. — Pour la propanamide, cf. no 555.

Z. — ⁽²⁾ et dichloréther as. (145,5), m. — Pour les oxydes-phénols, aussi avec la propanamide, cf. *A.*, p. 97, et *Ann. Ch.*, p. 189.

Amines et Oxydes ou Oxydes-phénols,

cf. *A.*, LX, p. 182/4 (1946).

Amines-oxydes et Fonctions diverses, cf. *ib.*, p. 186/7.

Cétones et Oxydes ou Oxydes mixtes, cf. *ib.*, p. 252/3.

Cétones-esters et Oxydes, *ib.*, p. 258/9.

Esters et Oxydes

Faute de place, ces azéotropes, fort nombreux, sont reportés à un prochain mémoire « Azéotropes d'oxydes avec des esters, des halogénures ou des hydro-

carbures » (désigné par E-Ha-Hy). Toutefois, pour les nitrites, cf. A., LX, p. 163/8 (1946).

Esters et Oxydes mixtes

Butyrate éthyle	Épichlorhy-	121,5	116,4	115,75	25	25 : 0,7	[150]
Maléate de M.	Gaiacol[drin.	204,05	205,05	205,15	20	F	[151]

Z. — Acét. M (56,95) et ox. M. chloré (59,15), ∞ idéale [16 : 0,6]. Isoval. i. B (171,2) ou oxal. É (185,65) et dichloréther s. (178,65), resp. m. p. [46 : 1,8] et t. l. n. [50 : — 0,9]. Bz. M (199,45) ou bz. É (212,5) et gaiacol (205,05), resp. m. n. et idéale. Cinn. M (261,9) ou bz. i. A (262,0) et eugénol (254,8), resp. m. n. et idéale.

Esters halogénés et Esters-Oxydes

Chloracét. É	[Acét. M. gl.	143,55	144,6	144,95	38	—	[152]
--------------	---------------	--------	-------	--------	----	---	-------

Z. — Chloracét. M (129,95) et acét. M. gl. (144,6), t. l. n. Chloracét. É (143,55) et acét. É. gl. (156,8), t. l. n. Bromacét. É (158,8) et acét. M. gl. (144,6) ou butoxy (171,75), t. l. n.; acét. É. gl. (156,8), m. n.

Esters-oxydes et Halogénures

Acét. M. glycol	Perchloréthylène	144,6	121,0	120,9	4	50 : 2,0	[153]
» (1)	Tétrachloré-	»	146,2	150,9	37	50 : -9,3	[154]
Acét. É. glycol	[thane s.	156,8	»	158,25	26	—	[155]
» (2)	Bromobenz.	»	156,1	155,45	37	45 : -1,4	[156]

Z. — (1) et br. éthylène (131,65), l. n.; chlorb. (131,75); l. p.; bromob. (156,1), f. — (2) et pentachloréthane (162,0), l. n.; br. triméthylène (166,9), m.; paradichlorbenzène (174,4), m. — Butoxy (171,75) et paradichlorb. (174,4), t. l.

Esters-oxydes et Hydrocarbures

Acét. M. glycol	Métaxylène	144,6	139,2	137,7	28	50 : 1,4	[157]
» (1)	Isopropylb.	»	152,8	144,3	94	—	[158]

Z. — (1) et toluène (110,75), l. [50 : 0,9]. Acét. É. gl. (156,8) et métaxylène (139,2), m. [50 : 0,8].

Esters-oxydes et Oxydes

Acét. M. glycol (1)	Orthoform.É	144,6	145,75	143,45	51	51 : 2,1	[159]
Acét. É. gl. (2)	Ox. isoamyl.	156,8	173,2	156,45	95	48 : 3,2	[160]

Pour le butoxy, cf. *Ann. Ch.*, n^{os} 8/10.

Z. — (1) et anisole (153,85), l. — (2) et orthoform. É (145,75), l.; anisole (153,85) ou cinéole (176,35), q.-az.; dichloréther s. (178,65), l. [49 : -0,8].

Esters-oxydes et Phénols

Acét. M. gl. (1)	Phénol	144,6	182,2	183,6	18	F	[161]
Acét. É. glycol	»	156,8	»	184,9	28	F	[162]
»	Orthocrésol	»	191,1	191,5	9	F	[163]
Butoxy (2)	»	171,75	»	194,1	32	F	[164]

(2) Pour deux autres azéotropes, cf. *Ann. Ch.*, n^{os} 11-12.

Z. — (1) et orthocrésol (191,1), q.-az. n.

Z. — Acét. M. gl. (144,6) ou d'É. gl. (156,8) et uréthane (185,25), l. — Salicylate M. (222,95) ou d'É. (233,8) et safrol (235,9), resp. l. et q.-az.

Halogénures et Oxydes, nombreux az. Cf. E.-HA-Hy.

Halogénures et Oxydes mixtes

Épichlorhydrine	[⁽¹⁾ Br. i. A.	116,4	120,65	111,2	63	—	[165]
Trichloréthér l. 1.2	Paradichlorbenz.	172,5	174,4	171,3	75	(⁽²⁾ F	[166]

Dichloréthér s. (⁽³⁾), cf. *Ann. Ch.*, n^{os} 172/4.

Z. — Ox. M. chloré (59,15) et br. Ê (38,4), m.; dichlorméthane (40,0), l.; chl. P (46,65), f.; chl. i. B (68,85), q.-az.; br. P (71,0) ou CCl⁴ (76,75), f.; chl. B (78,5), m. — (⁽¹⁾) Êpi. et CCl⁴ (76,75), f.; br. propène (140,5), m. — Dichloréthér as. (145,5) et chlorb. (131,75) ou bromob. (156,1), l. — (⁽²⁾) Trichloréthér l. 1.2 (172,5) et bromob. (156,1), l.; orthobromotoluène (181,5), m. — (⁽³⁾) Cf. *Ann. Ch.*, p. 170. — Paradibromob. (220,25) et gaïacol (205,05), q.-az.

Hydrocarbures et Oxydes, nombreux az. Cf. E-Ha-Hy.

Hydrocarbure et Oxyde (acétal) halogéné

Pinène α	Chloracétal	155,8	157,4	153,0	57	50 : 2,0	[167]
Camphène	»	159,6	»	155,2	44	F	[168]
Diisoamyle	»	160,2	»	155,5	65	65 : 1,5	[169]
Pinène β	»	163,8	»	156,2	77	75 : 1,5	[170]

Hydrocarbures et Oxydes-phénols

Diphényle	[ne Eugénol (⁽¹⁾)	256,1	254,8	253,5	50?	F	[171]
Diphénylméth-	Iseugénol (⁽²⁾)	265,4	268,8	264,7	80?	F	[172]

Z. — (⁽¹⁾) et α-M. naphthalène (244,6), f.; diphénylméthane (265,4), f. — (⁽²⁾) et diphényle (256,1) ou acénaphène (277,9), f.

Nitriles et Oxydes, cf. Ac. Belg., Bull. Sc., 1946, p. 378.

Nitrodérivés et Oxydes ou Oxydes-phénols

cf. A., LXXI, p. 93/4 (1947)

Nitrohalogénures et Oxydes, cf. ib., p. 96.

Oxydes et Oxydes, cf. A., LX, p. 162 (1946).

Oxydes et Oxydes mixtes

Ox. d'isoamyle	Dichloréthér	173,2	178,65	169,35	61	50 : 3,8	[173]
Cinéole	» [sym.	176,35	»	173,35	57	50 : 0,5	[174]

Eugénol avec oxydes, cf. *Recueil Trav. Ch.*, 47 (1928), p. 13.

Oxydes et Phénols

Phénol (⁽¹⁾)	Ox. isoamyl.	182,2	173,2	172,2	15	F	[175]
Orthocrésol (⁽²⁾)	Ox. amyle n.	191,1	187,5	186,2	...	F	[176]
Résorcinol	Ox. phényle	281,4	259,0	255,65	23	F	[177]

Z. — (⁽¹⁾) et ox. B (142,4), l.; phénétol (170,45) ou ox. M. isobornyle (192,4), m. — (⁽²⁾) et phénétol (170,45), l. p.; ox. i. A (173,2), m.; cinéole (176,35), f. n. — Paracrésol (201,7) et cinéole (176,35), m. n.; ox. A (187,5), f. — Carvacrol

(137,85) et anéthole (235,7), f.; safrole (235,9), m. — Naphtol α (288,5) et ox. ph. (259,0), idéale. — Safrole (235,9) et parachlorphénol (219,75), ∞ idéale. Pour d'autres az. et z., cf. *A*, B, 49 (1929), p. 241/2.

Oxydes et Sulfures

Cf. *Ac. Belg., Bull. Sc.*, 1947.

Oxydes et Varia

Cf. *A*, LXI (1947), p. 73/7; *Ac. Belg., Bull. Sc.*, 1943, p. 277.

Oxydes halogénés et Sulfures, cf. *Ac.* (l. c.), 1947.

Oxydes-phénols et Phénols, cf. *A*, B, 49 (1929), p. 143.

Oxydes-phénols et Sulfures, cf. *Ac.* (l. c.), 1947.

Z. — Gaïacol (205,05) et uréthane \hat{E} (185,25), m.

10 avril 1947.

Uccle-Bruxelles,
Laboratoire privé de l'auteur.

Recherches sur la tension limite d'entraînement des matériaux constitutifs du lit

PAR

L.-J. TISON

Professeur à l'Université de Gand

1) L'entraînement des matériaux constitutifs du lit d'un cours d'eau fut longtemps considéré comme déterminé avec une précision suffisante par la connaissance de la vitesse moyenne du courant et on a proposé des formules et des diagrammes liant cette vitesse moyenne au diamètre des matériaux constituant le lit. (1)

On s'aperçut cependant assez rapidement que cet entraînement était fonction de bien d'autres facteurs : Casey (2) en a fait un relevé des plus complets : poids spécifique des matériaux, leur forme, la constitution du mélange, leur enchevêtrement ou leur cohésion, la pente du courant, sa profondeur, la répartition des vitesses, la viscosité du liquide, la turbulence, la rugosité et la forme du lit, la courbure, etc. Il n'empêche que les relations entre les vitesses moyennes du courant et le diamètre du courant sont restées d'application courante (voir notamment le diagramme de Hjulström (3)), bien que depuis tout un temps, les hydrauliciens se soient servis d'un autre procédé permettant de mieux séparer et déterminer les actions de certains des facteurs signalés ci-dessus. Ils y sont parvenus par l'introduction de la notion de tension d'entraînement (4) : il est en effet aisé de voir que la tension tangentielle moyenne produite par le liquide sur le lit vaut γRi , γ étant le poids spécifique du liquide, R est le rayon moyen de la section et i est la pente du courant supposée parallèle à celle du fond. Cette expression devient γhi pour un lit rectangulaire très large, h étant la hauteur de l'eau.

Cette tension en s'exerçant sur les matériaux tend à en provoquer le mouvement et sa valeur pour le début du mouvement prend le nom de tension limite d'entraînement τ_0 . Ce qui tend à empêcher le mouvement des matériaux, c'est leur résistance au frottement et au roulement et c'est aussi leur encastrement ou leur cohésion : on voit aisément que l'équation de l'équilibre des forces sollicitantes, qui

correspond au début du mouvement, conduit à une relation reliant τ_0 à d , diamètre du grain.

Semblable relation a reçu diverses formes empiriques : formules de Schoklitsch, de Krey, d'Eisner, de Kramer, de l'U.S.W.E.S., de Casey, d'Indri, de Welikanoff, etc. (5).

2) Si l'on s'est contenté de formules empiriques (d'ailleurs souvent discordantes, car certains des facteurs signalés ci-dessus continuent à agir indépendamment), c'est que d'une part la loi de répartition des vitesses dans la couche liquide d'épaisseur égale au diamètre du grain était mal connue et que d'autre part, l'expression des efforts s'exerçant sur les grains était compliquée et variable avec les conditions : la transformation de l'équation d'équilibre signalée ci-dessus n'est par suite pas très aisée.

Les recherches sur les coefficients de résistance des sphères ont apporté certaines précisions et les travaux de Nikuradse, Prandtl et Karman (6) sur les écoulements turbulents en ont amené de plus importantes encore.

En 1936, Shields publiait un travail s'appuyant sur ces dernières recherches (7) qui lui permettait d'établir que le rapport $\frac{\tau_0}{(\gamma_1 - \gamma) \cdot d}$, γ_1 étant le poids spécifique du matériau, était une fonction du nombre de Reynolds réduit $\frac{u_* d}{\nu}$, ν étant le coefficient cinématique de viscosité du fluide dont la densité est ρ , u_* est la vitesse de frottement $\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}$:

$$\frac{\tau_0}{(\gamma_1 - \gamma) d} = f \left(\frac{u_* d}{\nu} \right)$$

D'après les résultats de ses essais, ainsi que de ceux de Casey, de Kramer, de Gilbert, de l'U.S.W.E.S., Shields estimait :

a) que le second membre de la relation ci-dessus vaut $\frac{0,1}{\frac{u_* d}{\nu}}$ tant que $\frac{u_* d}{\nu}$ est inférieur à 2;

b) qu'il reste constant et sensiblement égal à 0.03 pour $\frac{u_* d}{\nu}$ compris entre 2 et 10;

c) qu'il croît de 0.03 à 0.06 quand $\frac{u_* d}{\nu}$ varie de 10 à 1000;

d) qu'il reste sensiblement égal à 0.06 au-delà.

3) Mais en 1940 un travail anglais de White (8) reprenait la question en se basant sur les travaux relatifs à la turbulence de Fage (9). White envisage deux cas :

1^{er} cas). L'effort exercé sur le grain provient quasi uniquement des tensions tangentielles s'exerçant à sa surface. L'équilibre du grain sensiblement sphérique correspond alors à l'équation suivante :

$$\tau_o = \alpha \cdot \eta \cdot \frac{\pi}{6} (r_1 - r) \cdot d \cdot \operatorname{tg} \varphi \quad (1)$$

ou :

$$\frac{\frac{\tau_o d^2}{\eta}}{\pi / 6 (r_1 - r) d^3} = d \cdot \operatorname{tg} \varphi$$

φ étant l'angle du talus naturel sous eau avec la verticale,
 η est un coefficient de densité de répartition des grains égal à d^2 fois le nombre de grains par unité de surface;

α est un coefficient expérimental à introduire du fait que la résultante des tensions tangentielles s'exerce en un point situé au-dessus du centre de gravité du grain.

Cette formule peut s'écrire d'après les essais de White :

$$\tau_o = 0.18 \cdot (r_1 - r) \cdot d \cdot \operatorname{tg} \varphi \quad (1')$$

Les observations de Nikuradse et surtout celles de Fage à l'aide d'un ultramicroscope montrent que l'action des tensions tangentielles sur le grain est prépondérante tant que $\frac{u_* d}{v}$ est inférieur à 3.5, ce qui correspond à des grains dont les sommets atteignent environ le tiers de l'épaisseur δ du film laminaire (δ est donné par $\frac{\delta \cdot u_*}{v} = 11,6$);

dans ce cas, l'écoulement reste laminaire autour des grains et aucun tourbillon ne se détache des pointes des grains. White réalisa, pour vérifier cette formule, des écoulements laminaires utilisant soit de l'huile dans un tank à parois parallèles, soit de l'eau dans un ajutage convergent en plan : la formule 1' fut vérifiée par ces multiples essais.

2^{me} cas). Les actions tangentielles s'exerçant à la surface des grains sont négligeables. Dans ce cas, la résultante des actions normales passe par le centre du grain. L'équilibre, au moment où le grain se dispose à se déplacer exige alors que :

$$\frac{\frac{\tau_o d^2}{\eta}}{\pi / 6 (r_1 - r) d^3} = \operatorname{tg} \varphi$$

ou :

$$\tau_o = \eta \cdot \frac{\eta}{6} \cdot (r_1 - r) \cdot d \cdot \text{tg} \varphi \quad (2)$$

Cette équation se rapporte au cas où $\frac{u_* d}{v}$ est supérieur à 3.5 et nous dirons même nettement supérieur à 3.5, car il y a évidemment une zone de transition dans laquelle tensions tangentielles et tensions normales interviennent simultanément de façon sensible sur les grains.

Mais on sait que dans ce cas, des tourbillons se détachent des sommets des grains qui provoquent une non-permanence du mouvement autour des grains, les vitesses réelles sont soumises à des fluctuations qui ont été étudiées notamment par Fage. Celui-ci estime que les pulsations de la turbulence sont de l'ordre de la moitié de la vitesse moyenne locale au sommet des aspérités et comme les tensions sont alors proportionnelles au carré des vitesses, la tension maximum qui correspond au début de l'entraînement est de l'ordre de 2.25 fois la tension moyenne (White adopte 2 fois par suite des conditions de ses essais).

White est parvenu à réaliser ce cas à l'aide d'un ajutage à paroi supérieure convergente et à parois latérales parallèles : le mouvement restait permanent dans la masse du courant, mais des tourbillons naissaient autour des grains et y produisaient les fluctuations envisagées ci-dessus. White trouve effectivement dans tous les essais de ce genre (avec de l'eau ou de l'air, avec du sable ou de la grenaille d'acier) que la tension d'entraînement $\gamma \cdot h_i$ vaut très sensiblement la moitié de la valeur donnée par l'équation (2) dans laquelle η est pris égal à 0.4 d'après détermination faite en comptant les grains par unité de surface : à remarquer que dans ces cas, l'équation (2) devient sensiblement la même que l'équation (1').

4) Mais toujours d'après White, si l'écoulement se produit dans un canal ouvert à parois parallèles (c'est toujours le cas pour les essais des hydrauliciens), la turbulence au lieu de rester limitée à la couche immédiatement voisine de la paroi rugueuse comme dans le cas précédent, existe maintenant dans tout l'écoulement. White déduit d'autres expériences de Fage que les fluctuations de la vitesse au sommet des grains est maintenant sensiblement égale à la vitesse moyenne locale. Si le film au contact de la paroi reste laminaire ($\frac{u_* d}{v}$ inférieur à 3.5), les tensions dans cette région de mouvement laminaire sont évidemment proportionnelles aux vitesses et les tensions réelles peu-

vent par conséquent y atteindre une valeur double de la tension moyenne.

Mais si la turbulence s'étend non seulement au mouvement général mais aussi à la couche au voisinage de la paroi, on sait que les tensions deviennent alors proportionnelles aux carrés des vitesses, de sorte qu'en se basant sur les essais de Fage discutés par White, on trouve que les tensions réelles peuvent atteindre sur les grains une valeur quadruple de la tension moyenne $\tau_{h.i.}$

Il en résulte, d'après White, que dans un canal ouvert à parois parallèles, qui est le dispositif qui a habituellement servi aux essais d'entraînement :

a) la tension moyenne $\tau_{h.i.}$ pour laquelle l'entraînement commence vaut $\frac{0,18 \cdot (\tau_1 - \tau) \cdot d \cdot \operatorname{tg} \varphi}{2}$ si $\frac{u_* \cdot d}{v}$ est inférieur à 3.5

b) que cette tension moyenne vaut $\frac{0,18 (\tau_1 - \tau) \cdot d \cdot \operatorname{tg} \varphi}{4}$ si $\frac{u_* \cdot d}{v}$ est nettement supérieur à 3.5.

Nous ajoutons qu'il y a vraisemblablement une zone de transition pour les valeurs de $\frac{u_* \cdot d}{v}$ légèrement supérieures à 3.5.

Comme nous l'avons vu ci-dessus, White présente de nombreux essais établissant que la formule (1') donne effectivement la valeur de la tension d'entraînement au début du déplacement des matériaux quand le mouvement d'ensemble est laminaire.

Il présente également de nombreux essais montrant que sensiblement cette même valeur de τ_0 donnée par (1') doit être divisée par 2 pour trouver la tension moyenne d'entraînement quand la rugosité due aux grains provoque la naissance de tourbillons, sans que cependant la turbulence s'étende à tout le mouvement, mais sans qu'il y ait ce qu'il appelle de « large scale turbulence », Re_* étant cependant nettement supérieur à 3.5.

Par contre, il ne présente aucune vérification de ses déductions théoriques suivant lesquelles la tension moyenne d'entraînement serait aussi égale à la moitié de $0,18 \cdot (\tau_1 - \tau) \cdot d \cdot \operatorname{tg} \alpha$ quand, dans le cas de « large scale turbulence », dans un canal ouvert à parois parallèles, $\frac{u_* \cdot d}{v}$ est inférieur à 3.5.

De plus, il ne signale que deux essais se rapportant à ces mêmes circonstances quand $\frac{u_* \cdot d}{v}$ est nettement supérieur à 3.5, essais empruntés à Casey et à l'U.S.W.E.S. L'un de ces essais donne effectivement ce qu'il appelle avec raison un facteur de turbulence égal à 4 (le facteur de turbulence est celui par lequel il faut multiplier la

tension d'entraînement moyenne — γRi ou γhi — pour trouver la valeur donnée par la formule de White 0,18. ($\gamma_1 - \gamma$). $d.tga$). L'autre essai au contraire donne un coefficient de turbulence égal à 6.

5. Nous avons estimé par conséquent qu'il était souhaitable d'examiner plus particulièrement ces deux cas de « large scale turbulence », qui sont d'ailleurs ceux que l'on rencontre toujours dans la nature, pour vérifier si les considérations de White pouvaient être acceptées et examiner certaines discordances de cette dernière théorie avec les résultats de Shields. Nous nous baserons à cet effet sur les multiples essais effectués pour déterminer la vitesse limite d'entraînement ou la tension d'entraînement et particulièrement sur nos essais de 1938(10).

Malheureusement, la détermination expérimentale de la tension d'entraînement γhi ou mieux γRi se heurte à de nombreuses difficultés dont les principales sont les suivantes :

- a) la détermination de i avec précision est assez difficile et
- b) le fait que les essais sont en général effectués dans des canaux dont les parois ne sont pas recouvertes du matériau constitutif du fond entraîne l'existence de tensions tangentielles différentes sur le fond et les parois et il n'est pas toujours aisé de déterminer ce qui est dû à l'un ou aux autres.

Signalons encore que les divers expérimentateurs n'ont pas toujours adopté le même critérium du début du mouvement : certains prennent le mouvement des premiers grains isolés, d'autres attendent qu'un certain débit solide d'établisse. Nous avons donc multiplié nos déterminations de τ_0 et varié la provenance des résultats tout en admettant comme critérium du commencement du mouvement, le départ de quelques grains isolés. De plus, nous avons calculé τ_0 non seulement en nous basant sur la détermination expérimentale de i , mais aussi en utilisant la loi de répartition des vitesses déduites des théories de Prandtl et Karman (6).

6. Si $\frac{u_* d}{v}$ est inférieur à 3.5, la paroi est lisse et d'après les théories qui viennent d'être mentionnées basées sur les résultats de Nikuradse (6), on a pour la vitesse v à une distance y de la paroi d'un tuyau circulaire :

$$v = u_* \left(5,5 + 5,75 \cdot \log \frac{u_* d}{v} \right) \quad (3)$$

Il en résulte que la vitesse moyenne sur la verticale vaut :

$$U = u_* \left[5,5 + 2,5 \left(\ln \frac{yu_*}{v} - 1 \right) \right] \quad (4)$$

La formule (3) nous permet de trouver u_* si nous avons pu mesurer la répartition des vitesses sur la verticale (par exemple à l'aide d'un petit tube de Pitot) au début du mouvement des matériaux. Comme

$$u_* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}, \text{ on en déduit } \tau_0.$$

Il peut arriver que l'écoulement sur le matériau dont on recherche la tension d'entraînement ne se soit pas étendu sur une longueur suffisante à l'emplacement de la mesure pour que la répartition des vitesses sur la verticale obéissent à la loi dont il vient d'être question sur toute la hauteur de la verticale. C'est le cas de certains de nos essais de 1938 dans lesquels les vitesses dans les parties supérieures de certaines verticales sont encore quasi uniformément réparties. Dans ce cas, nous procéderons comme dans la recherche de la résistance de frottement en appliquant la formule (3) dans l'épaisseur de la couche limite. Cette détermination n'est pas influencée par l'action des parois latérales (au moins dans notre cas où le canal a 70 cm de largeur) et, comme nous l'avons déjà dit, elle se fait sans avoir à déterminer i expérimentalement.

Par contre, on peut se demander si la loi de Prandtl-Karman est applicable au cas d'un canal à parois parallèles et coulant à ciel ouvert. Dans nos essais, nous avons trouvé une correspondance satisfaisante entre les données de la formule (3) et nos résultats expérimentaux, bien que certaines recherches aient proposé une modification de certaines constantes de cette loi (II). Là où la chose était possible, nous avons d'ailleurs comparé les résultats de cette méthode avec ceux basés sur la détermination expérimentale de i et là aussi la concordance est très bonne.

Nous ne pouvons pas dire que l'utilisation de la formule (4) pour déterminer u_* en partant de la connaissance de la vitesse moyenne donne d'aussi bons résultats. La vitesse moyenne U obtenue en divisant le débit par la surface mouillée est en effet différente de la vitesse moyenne sur la verticale donnée par la formule (4), cette dernière n'étant pas influencée par les parois latérales. De plus, dans notre cas particulier, nous savons que la formule (3) n'est pas applicable pour les parties supérieures de certaines verticales, ce que suppose la formule (4). Pour ces deux raisons, le u_* déterminé par la formule (4) est inférieur au u_* réel. La comparaison des résultats obtenus en appliquant (3) et (4) peut nous donner une idée de l'erreur commise en appliquant (4).

7. Résultats d'essais avec mouvement général turbulent et $\frac{u_* d}{\nu}$ inférieur à 3.5.

a) L'application de la formule (3) aux résultats de nos mesures de 1938 pour un sable à grains ronds de $d = 0.015$ cm donne les résultats suivants :

Hauteur d'eau H : 18.7 cm. Pour diverses valeurs de v mesurées à des hauteurs y au-dessus du fond comprises entre 0.5 cm et 8 cm, on trouve u_* compris entre 1.20 cm/s et 1.16 cm/s.

Hauteur d'eau H : 2.77 cm. Pour y variant de 0.5 cm à 2.77 cm, u_* est compris entre 1.31 et 1.26 cm/s.

Hauteur d'eau H : 30.36 cm. u_* varie de 1.10 à 1.13 cm/s, etc.

Les autres applications de (3) pour le même sable, nous donnent des valeurs de u_* en concordance avec les précédentes, u_* étant d'autant plus grand que H est plus petit.

b) L'application de la formule (4) aux mêmes résultats de mesures donne les résultats suivants :

H	U	u_*
3 cm.	19.4 cm/s	1.14 cm/s
10	22	1.11
20	23.5	1.08
30	21.5	0.97
40	20	0.89

L'allure générale de la décroissance de u_* quand H croît est la même que ci-dessus, mais les valeurs de u_* sont inférieures de 10 (pour les faibles hauteurs d'eau) à 15 % (pour les fortes hauteurs d'eau) à celles trouvées sous le littéra a). Nous en avons déjà donné les raisons.

c) D'autre part, les essais de Casey sur un sable de 0.017 cm de diamètre ont donné les résultats suivants. τ_o étant déterminé par le produit $\gamma h i$ ainsi que par la formule (4) :

H	U	$\tau_o = \gamma . h . i$	(d'après la 4)	
			u_*	τ_o
0.68 cm	15.6 cm/s	1.72 dyn./cm,	1.18	1.4
0.79	16.7	1.98	1.19	1.42
2.01	18.4	1.67	1.14	1.30

Il résulte de l'examen de ce tableau et d'autres que nous ne reproduisons pas que les valeurs de u_* déduites de la formule (4) sont inférieures d'environ 15 % (très faibles hauteurs d'eau) à celles qu'on peut tirer de $\sqrt{\frac{\gamma h i}{\rho}}$, ce qui concorde avec les résultats des littéra a et b.

d) Nous avons groupé dans le tableau ci-dessous les valeurs de τ_o moyen pour le début du mouvement dans le cas $\frac{u_* d}{v}$ inférieur à 3.5.

TABLEAU I. — Re_* $\frac{u_* d}{\nu} < 3,5$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Auteur des essais	Hauteur d'eau Hcm	Nature des matériaux	d en cm	$\gamma_{ho} \cdot 10^2$ dynes/cm ²	u_* d'après la formule (3) cm/sec	u_* d'après la formule (4) cm/sec	T_0 d'après la for- mule (3) dynes/cm ²	T_0 d'après la for- mule (4) dynes/cm ²	T_0 d'après White $0,18(\gamma_1 - \gamma) \cdot d \cdot \text{tg } \varphi$	Coefficient de turbulence	$Re_* = \frac{u_* d}{\nu}$	$\frac{T_0 \text{ réel}}{T_1 - \gamma} d$
Tison	3	sable	0,015		1,28	1,14(1,26)	1,67	(1,64)	4,3	2,57	2,08	0,07
id.	10	id.	id.		1,23	1,11(1,22)	1,52	(1,50)	id.	2,82	1,90	0,063
id.	20	id.	id.		1,18	1,08(1,11)	1,40	(1,42)	id.	3,07	1,75	0,059
id.	30	id.	id.		1,12	0,97(1,07)	1,25	(1,17)	id.	3,43	1,56	0,053
id.	40	id.	id.			0,89(1,00)		(1,00)	id.	4,3	1,25	0,042
id.	47	id.	id.			0,856(0,93)		(0,87)	id.	4,9	1,10	0,037
id.	1	id.	0,025			1,35(1,49)		(2,21)	7,3	3,3	3,11	0,054
id.	10	id.	0,025			1,2(1,32)		(1,74)	7,3	4,18	2,75	0,043
id.	20	id.	id.			1,15(1,26)		(1,85)	7,3	3,94	2,63	0,046
id.	30	id.	id.			1,05(1,15)		(1,32)	7,3	5,5	2,40	0,033
id.	36	id.	id.			0,97(1,08)		(1,2)	7,3	6	2,30	0,03
id.	10	id.	0,03			1,25(1,38)		(1,9)	8,8	4,65	3,5	0,039
id.	20	id.	id.			1,18(1,30)		(1,69)	id.	5,2	3,25	0,035
id.	30	id.	id.			1,11(1,22)		(1,50)	id.	5,85	3,1	0,031
id.	1	id.	id.			1,41(1,55)		(2,40)	id.	3,65	3,85	0,049

Observations. — 1° La colonne 7 donne entre crochets, la valeur corrigée de u_* . — 2° La colonne 9 donne la valeur corrigée de τ_0 . — 3° V. W. S. = Versuchsanstalt für Wasserbau und Schiffbau, Berlin. — 4° Sokolov est cité d'après Indri.

TABLEAU I (suite). — $Re_* = \frac{u_* d}{\nu} < 3,5$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Auteur des essais	Hauteur d'eau Hcm	Nature des matériaux	d en cm	$\gamma \cdot h_0 \cdot \nu$ dynes/cm ²	u_* d'après la formule (3) cm/sec	u_* d'après la formule (4) cm/sec	τ_0 d'après la for- mule (3) dynes/cm ²	τ_0 d'après la for- mule (4) dynes/cm ²	τ_0 d'après White 0,18 · ($\gamma_1 - \gamma$) · d · kg φ	Coefficient de turbulence	$Re_* = \frac{u_* d}{\nu}$	$\frac{\tau_0 \text{ réel}}{(\gamma_1 - \gamma) d}$
Thijssen et Schiff	4	sable	0,028			1,25(1,38)	(1,90)	(1,90)	8,2	4,3	3,23	0,042
id.	10	id.	id.			1,22(1,34)	(1,80)	(1,80)	id.	4,55	3,13	0,040
id.	20	id.	id.			1,19(1,31)	(1,71)	(1,71)	id.	4,76	3,10	0,038
id.	30	id.	id.			1,11(1,22)	(1,48)	(1,48)	id.	5,52	2,85	0,033
id.	40	id.	id.			1,10(1,21)	(1,46)	(1,46)	id.	5,6	2,80	0,032
id.	50	id.	id.			1,19(1,31)	(1,71)	(1,71)	id.	4,76	3,10	0,038
Casey	0,68	id.	0,017	1,72		1,18(1,33)	(1,77)	(1,77)	4,9	2,8	2,15	0,064
id.	0,79	id.	id.	1,98		1,19(1,34)	(1,80)	(1,80)	4,9	2,46	2,37	0,073
id.	2,01	id.	id.	1,67		1,14(1,30)	(1,69)	(1,69)	4,9	2,92	2,08	0,0616
V.W.S. Casey		id.	0,0244	2,4					7,08	2,90	3	0,062
Sokolov		id.	0,0166	1,5					4,85	3,20	1,88	0,056
Gilbert	14,9	id.	0,031	2,12					9,1	4,3	3,8	0,042
U.S.W.E.S.		id.	0,0205	2,3					6	2,6	2,85	0,069
Casey	0,66	id.	0,027	1,65		1,1(1,21)		(1,48)	7,9	4,8	2,9	0,0375
id.	1,5	id.	0,027	1,84					id.	4,3	3,05	0,042
id.	2,11	id.	0,027	1,83					id.	4,3	3,05	0,042

Le même tableau donne le τ_0 déduit de la formule de White. Le rapport de ces deux valeurs doit fournir le coefficient de turbulence : d'après cet auteur, ce coefficient est égal, dans le cas qui nous occupe, au rapport de la vitesse réelle (compte tenu des fluctuations de la turbulence) à la vitesse moyenne locale, la comparaison étant faite pour une hauteur égale au diamètre des grains.

Lorsque la détermination de τ_0 moyen n'a pu être faite qu'à l'aide de la formule (4), la valeur de u_* donnée par cette formule a été augmentée de 10 à 15 % suivant les indications obtenues par les comparaisons des lettres a, b et c.

Nous n'avons pas cru devoir tenir compte des résultats de Chang (12), car il résulte de la discussion qui a suivi la présentation de cette étude que les valeurs de τ_0 ont pu être entachées d'une erreur assez importante.

Les valeurs de $\frac{\tau_0 \text{ réel}}{(\tau_1 - \tau)d}$ (13^e colonne du tableau I) ont été portées en diagramme en fonction du nombre de Reynolds réduit $Re_* = \frac{u_* d}{\nu}$ de façon à pouvoir comparer nos résultats à ceux de Shields qui a aussi dressé pareil diagramme.

De la considération de ce diagramme et du tableau I, on peut déduire les conclusions suivantes :

D'après White, pour $\frac{u_* d}{\nu}$ inférieur à 3.5, le coefficient de turbulence est égal à 2, ce coefficient étant précisément le rapport de la vitesse instantanée maximum à la vitesse moyenne locale au même point voisin du fond (voir aussi à ce sujet les considérations de Kalinske 13). Or, nos considérations nous donnent pour ce coefficient de turbulence des valeurs comprises entre 2.46 et 6. Remarquons d'ailleurs que White n'exclut pas la possibilité de valeurs supérieures à 2 et qu'il n'a présenté aucune vérification expérimentale dans le cas qui nous occupe actuellement.

D'autre part, on ne peut guère mettre en doute nos résultats. Ce pourrait être le cas s'ils étaient tous déduits de l'équation (4), mais 14 essais avec détermination de τ_0 par deux autres méthodes indépendantes conduisent à des valeurs du coefficient de turbulence comprises entre 2.46 et 4.8.

Il est d'ailleurs à remarquer que les grandes valeurs de ce rapport coïncident avec les grandes hauteurs d'eau et par conséquent, semble-t-il, avec les fortes turbulences, comme nous le disions déjà dans notre travail de 1938.

Nous reviendrons sur cette variation relativement considérable du

coefficient dit de turbulence après avoir examiné l'ensemble du problème

Si nous envisageons maintenant les résultats de Shields pour $\frac{u_* d}{v}$ inférieur à 3,5, nous constatons tout d'abord que d'après notre diagramme, il ne peut être question de donner à la loi de variation de $\frac{\tau_o}{(\gamma_1 - \gamma)d}$ en fonction de $\frac{u_* d}{v}$ la forme $\frac{0,1}{\frac{u_* d}{v}}$ proposée par Shields. Il

semble résulter de notre diagramme :

que $\frac{\tau_o}{(\gamma_1 - \gamma)d}$ est variable avec $\frac{u_* d}{v}$ et n'est pas égal à la constante 0,09 comme on pouvait le croire d'après White ⁽¹⁾;

que toutes les valeurs de $\frac{\tau_o}{(\gamma_1 - \gamma)d}$ pour $\frac{u_* d}{v}$ inférieur à 6 seraient comprises entre la loi $\frac{0,18}{\frac{u_* d}{v}}$ et une valeur légèrement inférieure à 0,03.

En s'appuyant sur les considérations de White, on pourrait même s'attendre à ce que pour $\frac{u_* d}{v}$ inférieur à 2, la loi de limite supérieure du quotient $\frac{\tau_o}{(\gamma_1 - \gamma)d}$ soit donnée par la valeur constante 0,09 au lieu de la loi $\frac{0,18}{(\frac{u_* d}{v})}$. Ce domaine possible des valeurs de $\frac{\tau_o}{(\gamma_1 - \gamma)d}$ en

fonction de $\frac{u_* d}{v}$ est limité par des lignes pointillées sur le diagramme.

On remarque encore que les points représentatifs de l'expression de $\frac{\tau_o}{(\gamma_1 - \gamma)d}$ en fonction de $\frac{u_* d}{v}$ semblent assez nettement alignés suivant des droites à coefficient angulaire positif quand ces points se rapportent à un même matériau, mais pour diverses hauteurs d'eau.

8. Pour les valeurs de $\frac{u_* d}{v}$ supérieures à 3,5, nous avons procédé d'une façon analogue à celle que nous avons adoptée ci-dessus. Toutefois, la détermination de u_* doit maintenant se faire à l'aide de la formule :

$$v = u_* \left[8,48 + 5,75 \log \frac{y}{d} \right] \quad (5)$$

(1) En supposant $\tan \alpha = 1$.

quand v a pu être mesuré en divers points de la verticale à l'aide du tube de Pitot, ou bien à l'aide de la formule :

$$U = u_* \left[8,48 + 2,5 \left(\ln \frac{H}{d} - 1 \right) \right] \quad (6)$$

quand seule la vitesse moyenne a pu être mesurée. Il va sans dire que la formule (6) donne des valeurs trop faibles de u_* pour les raisons déjà exposées pour la formule (4)

Dans le tableau II, nous avons reporté les résultats analogues à ceux relevés dans le tableau I, mais il s'agit cette fois d'essais avec valeurs de $\frac{u_* d}{v}$ supérieures à 3.5. Beaucoup de résultats relevés dans ce tableau II n'ont pu malheureusement être utilisés dans l'étude qui nous intéresse. C'est ainsi que nous n'avons pu prendre en considération :

a) les essais d'Indri, de Kramer, de Krey, du Versuchsanstalt de Berlin et de l'U.S.W.E.S. qui se rapportent tous à des courants tels que le mouvement des matériaux était déjà très important. Nous avons cependant fait figurer ces résultats dans notre tableau pour montrer qu'ils donnent des valeurs du coefficient de turbulence inférieures de très peu à celles des autres essais caractérisés par le mouvement de quelques grains isolés. Ces résultats relatifs à des essais à entraînement déjà important constituent ainsi une véritable confirmation des chiffres se rapportant au véritable début du mouvement.

b) les résultats d'Engels qui se rapportent à des lits constitués de matériaux par trop hétérogènes (la remarque vaut également pour les essais de l'U.S.W.E.S.).

c) beaucoup d'essais de Gilbert faits sur fond horizontal et pour lesquels l'expression $\gamma h i$ ne peut donner l'expression de τ_0 moyen.

Les résultats du tableau II ont été portés sur le même diagramme qui a déjà reçu ceux du tableau I. On remarquera dans la région $\frac{u_* d}{v} = 10$ les points de Thyse et Schijf relatifs à des entraînements de pierre ponce. Comparativement à tous les autres essais, ces points donnent des valeurs trop faibles de $\frac{\tau_0}{(\gamma_1 - \gamma)d}$. Cette discordance peut, selon nous, être expliquée de la façon suivante : on a compté pour le calcul de $(\gamma_1 - \gamma)$ sur un poids spécifique de la pierre ponce égal à 1.3; en fait, il s'agit là d'un poids moyen, car les divers grains de cette substance ont souvent des poids spécifiques légèrement différents. Les grains qui sont entrés en mouvement les premiers avaient vraisemblablement un γ_1 légèrement inférieur à la moyenne et leur τ_0 en était par conséquent un peu inférieur à ce qu'il aurait été pour un γ_1

TABLEAU II. — $\frac{u_* d}{\nu} > 3,5$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Auteur des essais	Hauteur d'eau en cm	Nature des matériaux	d en cm	γh_o dynes/cm ²	u_* d'après la formule (5) cm/sec	u_* d'après la formule (6) cm/sec	τ_o d'après la for- mule (5) dynes/cm ²	τ_o d'après la for- mule (6) dynes/cm ²	τ_o d'après White 0,18 ($\gamma_1 - \gamma$) d tg ϕ	Coefficient de turbulence	$Re_* = \frac{u_* d}{\nu}$	$\frac{\tau_o \text{ réel}}{(\gamma_1 - \gamma) d}$
Kramer		sable	0,0706	5,2					21	4,1	27	0,03
id.		id.	0,0558	3,9					16,2	4,15	16,5	0,0187
id.		id.	0,080	4,9					23,2	4,73	32	0,022
Krey		id.	0,0376	2,4					10,9	4,55	10,2	0,0305
id.		id.	p,0526	2,8					15,3	5,46	17	0,041
id.		id.	0,08	3,2					23,2	7,26	32	0,051
V. Berlin		id.	0,1154	5,3					33,5	6,3	56	
id.		id.	0,085	4,2					24,6	5,84	35	
id.		id.	0,0744	5,6					22,4	4	29,5	
id.		id.	0,08	5,6					23,4	4,17	32,5	
id.		id.	0,068	5					20	4	25,5	
Schaffernack		id.	0,1536	7,5					44,5	5,95	85	
Schoklitsch		id.	0,0926	2,8					26,9	9,6	40	
id.		id.	0,124	4,4					36	8,2	61	
id.		id.	0,2254	11,3					65	5,9	150	
id.		id.	0,4	26,3					116	4,4	360	
id.		id.	0,652	54,4					190	3,5	750	
Engels		id.	0,1484	10,1					43	4,3	81	
Indri		id.	0,032	1,8					9,4	5,22	8,3	
id.		id.	0,047	3,1					13,7	4,42	14,6	
id.		id.	0,25	24					72,5	3,1	177	
id.		id.	0,4	40,8					126	3,2	374	
id.		gravier	4,5	550					1310	2,4	1350	

Observations : 1° La colonne 7 donne entre crochets la valeur nominale de τ_o en dynes/cm².

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Auteur des essais	Hauteur d'eau en cm	Nature des matériaux	d en cm	$\gamma \cdot h_o \cdot i_o$ dynes/cm ²	u^* d'après la formule (5) cm/sec	u^* d'après la formule (6) cm/sec	τ_o d'après la for- mule (5) dynes/cm ²	τ_o d'après la for- mule (6) dynes/cm ²	τ_o d'après White 0,18 ($\gamma_1 - \gamma$) d. tg ϕ	Coefficient de turbulence	$Re^* = \frac{v}{u^* d}$	$\frac{\tau_o \text{ réel}}{(\gamma_1 - \gamma) d}$
U.S.W.E.S.		sable	0,052	4,3					15,2	3,55	17	
id.		id.	0,0347	2,9					10,1	3,47	9,1	
Gilbert	11,9	id.	0,0576	2,95					16,7	5,6	8	0,032
id.	9,57	id.	0,09	5,64				(4,84)	26,7	4,7	18	0,038
Casey	1,99	id.	0,094	4,98				(4,55)	27,7	5,5	17,3	0,033
id.	3,69	id.	id.	4,61		2 (2,2)		(3,22)	id.	6	16	0,03
id.	5,12	id.	id.	4,46		1,94(2,03)			id.	6,18	14,1	0,029
id.	1,7	id.	0,175	8,4		1,62(1,8)			50,8	6,04	42	0,0296
id.	3,05	id.	id.	7,62					id.	6,65	40	0,027
id.	6,7	id.	id.	18,51					id.	5,96	42,5	0,03
White		id.	0,56	44					184	4,19	310	0,043
Casey	2,55	sable	0,246	12,7					74,7	5,8	73	0,031
id.	4,84	id.	id.	12,2					id.	6,06	71,5	0,03
id.	10,84	id.	id.	13,78					id.	5,36	75,5	0,0335
id.	0,69	id.	0,068	2,78					19,7	7,1	9,4	0,025
id.	1,76	id.	id.	3,49		1,74(1,91)		(3,66)	id.	5,7	10,7	0,0315
id.	2,33	id.	id.	3,24					id.	6,1	10,3	0,0295
id.	2,99	id.	id.	3,13					id.	6,3	10	0,0285
id.	0,73	id.	0,087	4,03		1,64(1,80)		(3,24)	25	6,2	14,6	0,029
id.	1,74	id.	id.	4,16					id.	6	15	0,03
id.	3,80	id.	id.	4,13					id.	6	15	0,03
id.	4,51	id.	id.	3,8					id.	6,6	14,2	0,027
Shields		Ambre	0,156	0,34					1,68	4,94	7,6	0,0365

TABLEAU II (suite) — $\frac{u_* d}{\nu} > 3,5$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Auteur des essais	Hauteur d'eau en cm	Nature des matériaux	d en cm	$\tau_{ho,io}$ dynes/cm ²	u^* d'après la formule (5) cm/sec	u^* d'après la formule (6) cm/sec	τ_0 d'après la for- mule (5) dynes/cm ²	τ_0 d'après la for- mule (6) dynes/cm ²	τ_0 d'après White 0,18 ($\tau_1 - \tau$). $d \cdot \lg \varphi$	Coefficient de turbulence	$Re_* = \frac{u_* d}{\nu}$	$\frac{\tau_0 \text{ réel}}{(\tau_1 - \tau) d}$
Schields		lignite	0,18	1,8					8,7	4,85	20	0,037
id.		feldspath	0,344	51					201,1	3,98	205	0,045
id.		id.	0,246	31					143,5	4,63	115	0,039
id.		id.	0,152	17					89	5,25	52	0,034
id.		id.	0,069	7					40,3	5,74	15,3	0,031
id.		id.	0,036	4,2					21	5	6	0,036
id.		id.	0,276	39					166	4,2	127	0,043
Tison	5	sable	0,1		2,28(2,5)		(6,25)		29,2	4,67	20,8	0,0355
id.	10	id.	0,1		2,24(2,46)		(6)		id.	5	20,5	0,036
id.	20	id.	0,1		2 (2,2)		(4,84)		id.	6,02	18,5	0,03
id.	30	id.	0,1		1,88(2,07)		(4,26)		id.	7	17,5	0,0258
id.	7	id.	0,2		3,55(3,9)		(15,2)		60	3,97	65	0,0455
id.	15,7	gravier	1		7,8(8,4)		(70)		295	4,25	670	0,042
Laboratoire	14	sable	0,08		1,62(1,88)		(3,5)		23,5	6,7	12,5	0,0268
Gand	20	id.	id.		1,78(1,96)		(3,86)		id.	6,09	13	0,03
(Delmotte	60	id.	id.		1,82(2)		(4)		id.	5,87	13,3	0,03
et Poll)	20a45	id.	0,15		2,47(2,72)		(7,4)		44,5	6	34	0,03
id.	40	id.	0,2		2,78(3,06)		(9,4)		60	6,4	51	0,028
id.	6	id.	0,4		5,72(6,29)		(39,6)		116	3	210	0,06
id.	10	id.	id.		5,36(5,82)		(35)		116	3,8	196	0,05
id.	20	id.	id.		4,76(5,25)		(27,6)		116	4,2	184	0,043
id.	40	id.	id.		4,29(4,72)		(22,4)		116	5,2	158	0,0346

égal à 1.3, alors que le dénominateur $(r_1 - r)d$ a été calculé pour la valeur moyenne 1.3 de r_1 . Le quotient porté en ordonnée est donc en fait inférieur à la réalité.

Tableau et diagramme nous permettent encore une fois de tirer les conclusions suivantes :

a) On constate tout d'abord que tout aussi bien pour $\frac{u_* d}{v}$ supérieur qu'inférieur à 3.5, la valeur de $\frac{u_* d}{v}$ ne suffit pas pour déterminer le rapport $\frac{\tau_0}{(r_1 - r)d}$. Ici encore, la valeur de ce rapport est influencée par la hauteur de l'eau, qui n'intervient que par son action sur la turbulence comme nous l'avions déjà signalé précédemment (10). Tout autre facteur agissant sur la turbulence (des grilles par exemple) aurait un effet analogue.

b) Alors que ce que nous avons appelé le coefficient de turbulence prend des valeurs comprises entre 2.46 et 6 dans le tableau I pour des valeurs de $\frac{u_* d}{v}$ inférieures à 3.5 (quand ce coefficient de turbulence est d'après White égal au rapport de la vitesse totale maximum à la vitesse moyenne locale), il prend dans le tableau II, pour $Re_* = \frac{u_* d}{v}$ supérieur à 3.5, des valeurs comprises entre 4 et 7, alors que d'après la même théorie de White, ce coefficient est ici égal au carré du rapport de la vitesse maximum réelle à la vitesse moyenne locale. Les grandes valeurs du coefficient de turbulence dans le tableau II correspondent d'ailleurs aux faibles valeurs de $Re_* = \frac{u_* d}{v}$.

Il ne faut cependant pas oublier que si la tension tangentielle τ_0 est effectivement proportionnelle à la vitesse pour Re_* inférieur à 3.5, cette même tension ne devient proportionnelle au carré de la vitesse que pour un nombre de Reynolds réduit $Re_* = \frac{u_* d}{v}$ nettement supérieur à 3.5 : on admet généralement que Re_* doit atteindre une valeur minimum de 70 pour que la tension tangentielle soit proportionnelle au carré de la vitesse (tout ceci se rapporte évidemment à ce qui se passe le long de la paroi). Il y a donc une zone comprise entre Re_* supérieur à 3.5 et inférieur à 70 pour laquelle notre tension tangentielle présente une partie proportionnelle à la vitesse et une autre proportionnelle au carré de la vitesse et reste par conséquent comprise entre les deux valeurs données par ces deux lois.

Il semble résulter de ce qui précède que, lorsque les autres facteurs agissant sur la turbulence interviennent sensiblement de la même

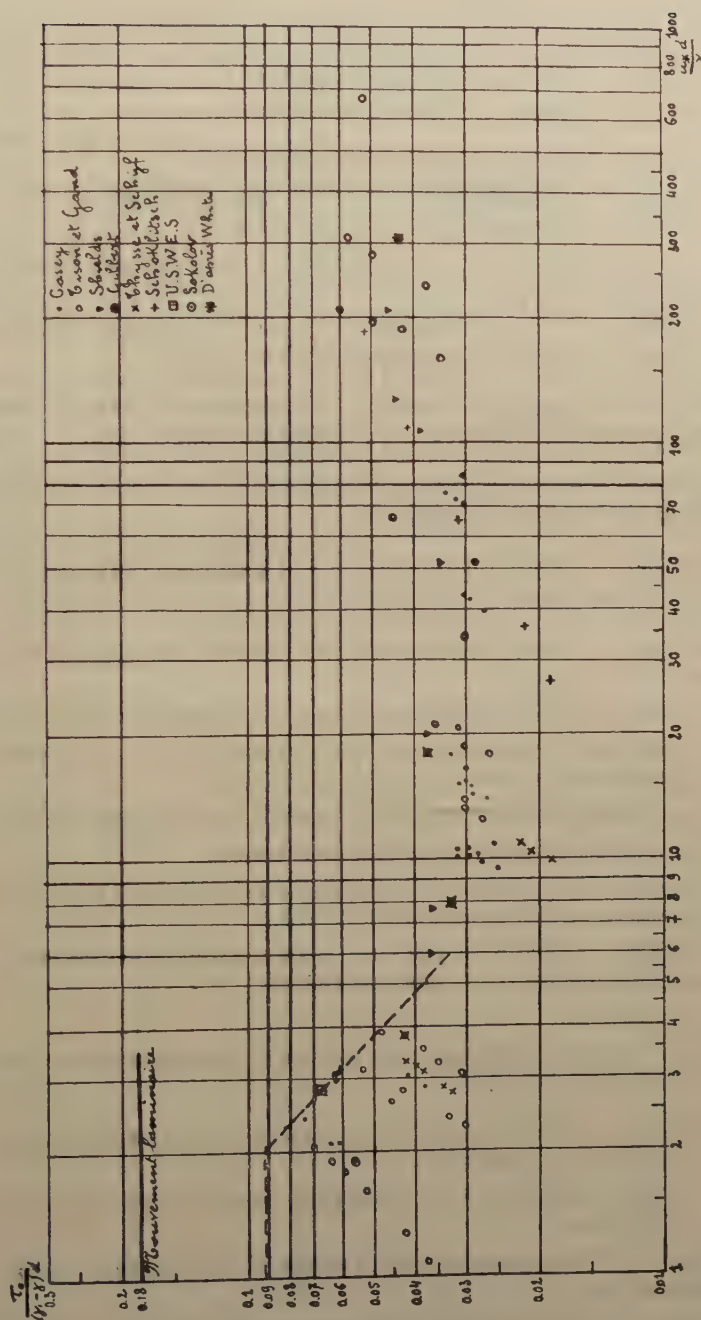
façon, la variation de la vitesse, en un point donné, sous l'action de la turbulence, pour autant que cette variation soit décelée par la mise en mouvement des matériaux, décroît très nettement quand Re_* augmente.

Ainsi, il semble que pour les toutes petites valeurs de Re_* (inférieures à 3.5), le rapport de la vitesse totale maximum réelle à la vitesse moyenne locale décelée par le mouvement des matériaux prend des valeurs maxima de l'ordre de 6. Les plus grandes valeurs de ce rapport diminuent, sans doute de façon continue, pour atteindre environ 3.5 à 4 pour Re_* égal à 10 (on est ici dans la zone de transition mentionnée ci-dessus) et ne plus valoir que 2.5 pour $Re_* = 70$. Ces valeurs maxima du rapport envisagé tombent encore pour ne plus valoir qu'environ 2 dès que Re_* atteint 200, puis restent sensiblement les mêmes au-delà (ce rapport est dans cette région, la racine carrée de notre coefficient de turbulence).

On ne voit pas très bien les raisons pour lesquelles le rapport des vitesses en question doit suivre semblable loi. Aussi avons-nous à dessein insisté sur les mots « décelé par le mouvement des matériaux ». Ne serait-il pas plus acceptable d'admettre que ce rapport des vitesses envisagées ne varie guère avec Re_* ? On se trouve en effet partout dans le cas de « large scale turbulence » ; mais on pourrait plutôt admettre que certaines valeurs instantanées de la vitesse — les plus grandes en intensité et les plus courtes en durée — peuvent exercer leur action sur les tout petits matériaux (Re_* petit) alors qu'elles deviennent de plus en plus incapables d'action — par suite du très faible temps durant lequel elles agissent — sur les matériaux de plus en plus lourds correspondant à des Re_* croissants.

c) On peut d'autre part répéter dans cette région une constatation déjà faite dans le domaine où Re_* est inférieur à 3.5 : dans les diagrammes logarithmiques donnant $\frac{\tau_0}{(\gamma_1 - \gamma)d}$ en fonction de Re_* , les divers points représentatifs de l'entraînement d'un même matériau pour diverses hauteurs d'eau se présentent sur une droite à coefficient angulaire positif.

d) Pour les valeurs de Re_* supérieures à 10, les considérations de Shields sont sensiblement confirmées par notre diagramme. Le minimum du rapport $\frac{\tau_0}{(\gamma_1 - \gamma)d}$ peut cependant tomber à moins de 2.5 et d'autre part, ce rapport semble ne plus beaucoup croître à partir de Re_* égal à 300, atteignant et conservant alors une valeur nettement inférieure à 0.06 et dont la valeur moyenne est environ 0.045 correspondant à un coefficient de turbulence 4.



BIBLIOGRAPHIE

- 1) DU BUAT. — Principes d'Hydraulique. Paris, 1786.
GILBERT. — The transportation of debris by running water. *Prof. Paper* Nr 86. U. S. Geological Survey Washington.
OWENS. — Experiments on the transporting power of sea currents. *Geographical Journal*, 31. London, 1908.
SCHAFFERNACK. — Neue Grundlagen für die Berechnung der Geschiebeführung in Flussläufen. Leipzig und Wien, 1922.
- 2) CASEY. Ueber Geschiebebewegung. — *Mitteilungen der Preussischen Versuchsanstalt für Wasserbau und Schiffbau*. Berlin, 1935.
- 3) HJULSTRÖM. — Studies of the morphological activity of rivers as illustrated by the River Fyris. Upsala, 1935.
- 4) DU BOYS. — Le Rhône et les rivières à lit affouillable. *Annales des Ponts et Chaussées*, 1879.
- 5) SCHOKLITSCH. — Ueber Schleppkraft und Geschiebebewegung. Leipzig und Berlin, 1914.
ID. — Geschiebebewegung in Flüssen und an Stauwerken. Wien, 1926.
ID. — Der Geschiebebetrieb und die Geschiebefracht. *Wasserkraft und Wasserwirtschaft*. 1934.
KREY. — Modellversuche für einen Fluss mit starker Geschiebebewegung.
EISNER. — Offene Gerinne in Wiens und Harms.
KRAMER. — Modellgeschiebe und Schleppkraft. *Mitt. der Preussischen Versuchsanstalt für Wasserbau*. Berlin, 1932.
U. S. W. E. S. — Studies of river bed materials and their movements with special reference to the Mississippi System.
CASEY. — Op. cit.
INDRI. — Il problema del trasporto solido ed i risultati di recenti ricerche. *Energia Elettrica*, 1941.
- 6) NIKURADSE. — Strömungsgesetze in rauhen Röhren. *Forschungsheft* 361 V. D. I. Verlag. 1933.
ID. — Gesetzmässigkeit der turbulenten Strömung in glatten Röhren. Id. 356. 1932.
PRANDTL. — Ueber die ausgebildete Turbulenz. 2. *Int. Kong. f. Techn. Mech.* Zurich, 1926.
V. KARMAN. — Mechanische Aenlichkeit und Turbulenz. 3. *Int. Kong. f. Techn. Mech.* Stockholm. 1930.

- 7) SHIELDS. — Anwendung der Aehnlichkeitsmechanik und der Turbulenz. Forschung auf die Geschiebepbewegung. *Mitt. der Preuss. Versuchsanstalt für Wasserbau und Schiffbau*. Berlin, 1936.
- 8) C. M. WHITE. Equilibrium of grains on the bed of a stream. *Proc. Roy. Soc. London*. A. 174, 1940.
- 9) A. FAGE. — Rep. Memo. Aero. Res. Comm. London, p. 1585, 1933.
Id. — *Phil. Mag.*, 7, 21-80.
- 10) L. J. TISON. — Relation entre la vitesse d'érosion des sables, le diamètre des grains et la hauteur de l'eau. — *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, 1938.
- 11) TAYLOR. — Flow in pipes and between Parallel Planes. *Proc. Roy. Soc. London*, 1937, 159, p. 496.
GOLDSTEIN. — The similarity Theory of Turbulence and Flow between parallel planes and through pipes. Id. p. 473.
- 12) CHANG. — Laboratory Investigation of flume Traction and Transportation *Proc. Amer. Soc. Civ. Eng.* 1937.
- 13) KALINSKE. — Criteria for determining sand-transport; National Research Council. *Amer. Geographysical Union Transactions* of 1942. Washington.

THESE CHANGES ARE THE RESULT OF THE
 RECENT REVISIONS OF THE CODE OF FEDERAL
 REGULATIONS.

THESE CHANGES ARE THE RESULT OF THE
 RECENT REVISIONS OF THE CODE OF FEDERAL
 REGULATIONS.

THESE CHANGES ARE THE RESULT OF THE
 RECENT REVISIONS OF THE CODE OF FEDERAL
 REGULATIONS.

THESE CHANGES ARE THE RESULT OF THE
 RECENT REVISIONS OF THE CODE OF FEDERAL
 REGULATIONS.

THESE CHANGES ARE THE RESULT OF THE
 RECENT REVISIONS OF THE CODE OF FEDERAL
 REGULATIONS.

THESE CHANGES ARE THE RESULT OF THE
 RECENT REVISIONS OF THE CODE OF FEDERAL
 REGULATIONS.

THESE CHANGES ARE THE RESULT OF THE
 RECENT REVISIONS OF THE CODE OF FEDERAL
 REGULATIONS.

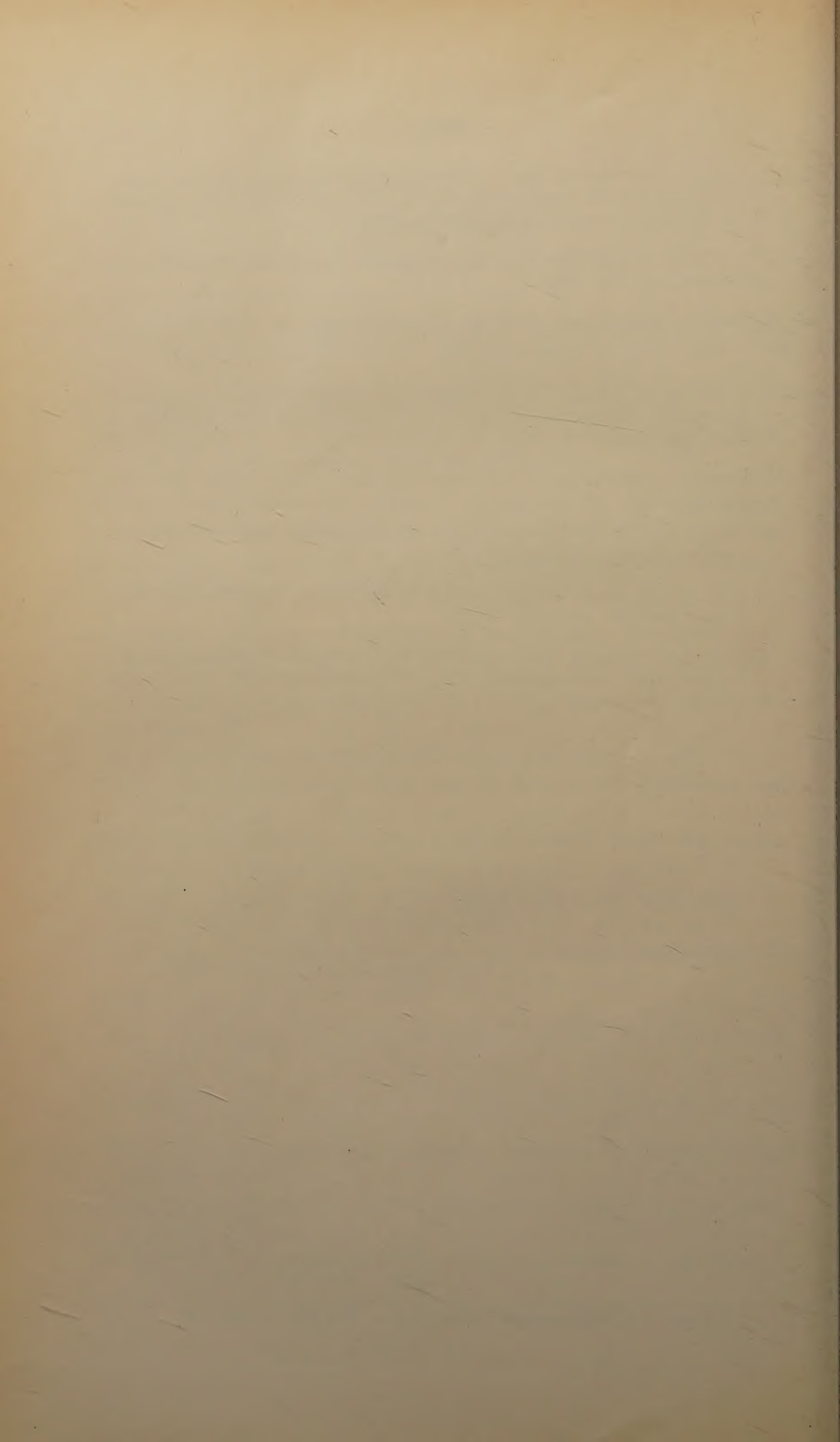
THESE CHANGES ARE THE RESULT OF THE
 RECENT REVISIONS OF THE CODE OF FEDERAL
 REGULATIONS.

THESE CHANGES ARE THE RESULT OF THE
 RECENT REVISIONS OF THE CODE OF FEDERAL
 REGULATIONS.

THESE CHANGES ARE THE RESULT OF THE
 RECENT REVISIONS OF THE CODE OF FEDERAL
 REGULATIONS.

THESE CHANGES ARE THE RESULT OF THE
 RECENT REVISIONS OF THE CODE OF FEDERAL
 REGULATIONS.

THESE CHANGES ARE THE RESULT OF THE
 RECENT REVISIONS OF THE CODE OF FEDERAL
 REGULATIONS.



Revue des Questions Scientifiques

Cette revue, fondée en 1877 par la Société scientifique de Bruxelles, se compose actuellement de cinq séries : la première série comprend 30 volumes (1877-1891) ; la deuxième, 20 volumes (1892-1901) ; la troisième, 30 volumes (1902-1921) ; la quatrième, 30 vol. (1922-1936). La livraison de janvier 1937 inaugura la cinquième série.

La revue fut interrompue par la guerre, après le deuxième fascicule, avril 1940, du tome 117 de la collection. Ce tome fut achevé par les fascicules de février et juillet 1946.

Le tome 118 paraît en 1947, en quatre fascicules d'environ 160 pages chacun : 20 janvier, 20 avril, 20 juillet, 20 octobre.

Depuis 1947 la Revue est aussi l'organe de l'UNION CATHOLIQUE DES SCIENTIFIQUES FRANÇAIS.

Administration et Rédaction : 11, rue des Récollets, Louvain (Belgique).

PRIX D'ABONNEMENT :

Belgique, Congo belge et Grand-Duché de Luxembourg	200 francs belges
France et colonies françaises (s'adresser au Centre du Livre français, 1, rue de la Visitation, Paris 7 ^e) . . .	500 francs franç.
Suisse (s'adresser à la Librairie de l'Université, 6, rue Haldimand, Lausanne).	28 francs suisses
Canada (s'adresser aux Messageries France-Canada, 5466, avenue du Parc, Montréal 8)	6 dollars 50
Autres pays (s'adresser au Secrétariat, à Louvain)	280 francs belges

PUBLICATIONS DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE

EXTRAIT DU CATALOGUE

ANNALES DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES, t. I à t. XLVI, 1875 à 1926. Chaque vol. in-8° de 400 à 600 pages fr. 100,00

TABLES ANALYTIQUES DES ANNALES,

t. I à XXV (1875 à 1901) fr. 20,00
t. XXVI à XLVI (1902 à 1926) fr. 40,00

ANNALES DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES,

Série A (sc. mathématiques), t. XLVII à t. LVI (1927 à 1936) fr. 70,00

Série B (sc. physiques et naturelles) » fr. 70,00

Série C (sc. médicales) (1927 et 1928) fr. 100,00 — (1929 à 1933) fr. 40,00
(1934 à 1936) fr. 20,00

Série D (sc. économ. et techniques) (1927 à 1929) fr. 20,00 — (1930) fr. 60,00
(1931 à 1936) fr. 100,00

Série I (sc. mathématiques et physiques), tt. LVII à LX (1937 à 1940,46) fr. 70,00

Série II (sc. naturelles et médicales), tt. LVII à LX (1937 à 1940,46) fr. 70,00

Série III (sc. économiques), tt. LVII à LIX (1937 à 1940) fr. 100,00

REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES,

t. I à XCII (1877 à 1927). Les deux volumes annuels. fr. 120,00

Le fascicule trimestriel fr. 34,00

t. XCIII à CXVI (1928 à 1939). Les deux volumes annuels fr. 160,00

Le fascicule fr. 28,00

t. CXVII (1940 et 1946). Le volume fr. 200,00

Le fascicule fr. 50,00

TABLES ANALYTIQUES DE LA REVUE,

t. I à L (1877 à 1901) fr. 20,00

t. LI à LXXX (1902 à 1921) fr. 20,00

t. LXXXI à CX (1922 à 1936) fr. 30,00

MONOGRAPHIES DE SCIENCES NATURELLES

I. — **B. Tougarinoff**. Les réactions organiques dans l'analyse qualitative minérale (cations). — Un vol. in-8° de 107 pages (1930) : fr. 24,00

II. — **V. Schaffers**. Le paratonnerre et ses progrès récents. Un vol. in-8° de 90 pages (1931) : fr. 24,00

IV. — **F. Kaisin et E. de Pierpont**. Hydrogéologie des Calcaires de la Belgique. Un vol. in-8° de 111 pages, avec 35 fig. et un plan hors-texte (1939) : en Belgique, fr. 24,00 (épuisé) ; autres pays, fr. 30,00.

MONOGRAPHIES MÉDICALES

I. — **M. Schillings**. Le rein en fer à cheval. Un vol. in-8° de 104 pages, avec 8 planches hors-texte (1928) : fr. 70,00
autres pays, 90,00 fr.

III. — **P. Van Gehuchten**. La pathologie du système pallido-strié. Un vol. in-8° de 52 pages, avec 8 planches hors-texte (1930) : fr. 24,00
autres pays, fr. 30,00.

MONOGRAPHIES DES SCIENCES ÉCONOMIQUES

I. — **A. Henry**. La structure technique de l'agriculture belge et ses particularités en Wallonie et en Flandre. Un vol. de 66 pages fr. 20,00

II. — **A. Henry**. Les variations régionales de l'Agriculture en Belgique. Un vol. de 50 pages fr. 10,00

III. — **A. Delperée**. La réglementation conventionnelle des conditions de travail en Belgique. Un vol. de 200 pages fr. 60,00